دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش منطق

عنوان

خودنامصداقی و ناتمامیت

استاد راهنما

دکتر سعید صالحی‌پورمهر

استاد مشاور

دکتر جعفرصادق عیوضلو

پژوهشگر

فاطمه آذرپیوند

۱۳۹۰

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می‌دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی‌همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی‌آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می‌دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه‌هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می‌بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می‌بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزتر از جانم

و به همسرم که عاشقانه دوستش دارم

بنام خدا

و لَمْ یَشْکُرُ الْمَخلوق لَمْ یَشْکُرُ الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **سعید صالحی‌پورمهر** ، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر**جعفرصادق‌عیوضلو** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقای دکتر **مرتضی منیری** که بزرگواری نموده و داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند کمال تشکر را دارم.
از دوستان عزیزم خانم نیر جنگی بهادر و همچنین خانم مریم سیری به خاطر همکاری‌های صمیمانه‌شان سپاس گزارم.

از جناب آقایان دکتر حسین امامعلی‌پور ریاست دانشکده علوم ریاضی، دکتر صداقت شهمراد معاونت پژوهشی دانشکده علوم ریاضی، دکتر حمید موسوی مدیرگروه ریاضی محض، و نیز کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

بوسه بر دستان پدر و مادر عزیزم و نیز پدر و مادر عزیز همسرم می‌زنم که صبورانه رنج سال‌های تحصیل مرا تحمل کردند و اندرزهای‌شان همیشه روشنگر راهم بوده و خواهد بود انشاالله.

و سپاس و سپاس از همسر مهربانم که وجودش التیام‌بخش لحظه‌های سختی بود که سپری شد و عاشقانه مرا در این راه یاری کرد.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

فاطمه آذرپیوند
۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: آذرپیوند   نام: فاطمه
عنوان: خودنامصداقی و ناتمامیت
استاد راهنما : دکتر سعید صالحی‌پورمهر استاد مشاور : دکتر جعفرصادق عیوضلو
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی محض   گرایش: منطق   دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی   تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۰   تعداد صفحات: ۵۴
کلید واژه‌ها: خودنامصداقی، ناتمامیت، پارادوکس بِری، پارادوکس گرلینگ

چکیده

قضیه‌ی ناتمامیت گودل، که از مهم‌ترین نتایج ریاضیات قرن بیستم است، توسط ایده‌ی فلسفی تنازع دروغگو اثبات شد. گودل در مقاله‌ی اصلی‌اش اشاره می‌کند که به جای پارادوکس دروغگو می‌توان از دیگر پارادوکس‌ها مانند پارادوکس بری (کوچک‌ترین عدد طبیعی توصیف ناپذیر) بهره جست.

در این پایان‌نامه با به کار گرفتن متناقض‌نمای گرلینگ از عبارات خودنامصداق، یک اثبات معنایی از قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل ارائه می‌دهیم. برای نظریه‌ی T شامل ZF، جمله‌ی HET_T را می‌سازیم که به طور شهودی بیان می‌کند محمول «خودنامصداق» خودش، خودنامصداق است. نشان می‌دهیم که این جمله از T نتیجه نمی‌شود و (به طور اثبات‌پذیر در T) با سازگاری T معادل است. بالاخره، نشان می‌دهیم چگونه یک برهان ناتمامیت مشابه برای حساب پئانو بسازیم.

فهرست مطالب

مقدمه

پارادوکس «خودنامصداقی» یکی از باستانی‌ترین تنازعات فلسفی بوده و بحث و جدل‌های فراوانی راجع به آن در محافل منطقی و فلسفی روی داده است. صفاتی را که در مورد خود کلمه درست هستند، «خودمصداق» می‌نامیم و صفاتی که در مورد خود کلمه درست نیستند، «خودنامصداق» نام می‌گیرند. حال خود صفت خودنامصداق، خودمصداق است اگر و تنها اگر خودنامصداق باشد و این تناقض است.

در این پایان‌نامه، سعی بر بیان برهانی معنایی برای قضیه دوم ناتمامیت گودل است. این برهان جدید بر اساس تنازعات گرلینگ از صفات خودنامصداق بیان شده است.

برهان‌های متعددی برای قضایای اول و دوم ناتمامیت وجود دارد. ما ابتدا برهان زیبای بولوس [۲] از قضیه‌ی اول ناتمامیت را که بر مبنای پارادوکس بری انجام شده است، بیان می‌کنیم و بعد از آن به ارائه‌ی یادداشتی که کیکوچی [۷] راجع به این مطلب داشته می‌پردازیم. در فصل دوم گسترش‌هایی از برهان بولوس را که سرنی در مقاله‌ی [۱۱] راجع به آن بحث کرده، می‌آوریم. فصل سوم [۱۳] و فصل چهارم [۴] به مطالبی درباره‌ی خودنامصداقی و ناتمامیت اختصاص دارند و همچنین اثبات معنایی از قضیه‌ی دوم ناتمامیت که در بالا از آن یاد شد، در فصل چهار ارائه خواهد شد.

فصل ۱

اثبات جدیدی از قضیه‌ی گودل

بسیاری از قضایا اثبات‌های فراوانی دارند. بعد از ارائه‌ی اولین اثبات دقیق قضیه‌ی اساسی جبر توسط گاوس، وی سه اثبات دیگر از آن ارائه داد. تعدادی از اثبات‌های دیگر تاکنون پیدا شده‌اند. قضیه فیثاغورث که قدیمی‌تر و ساده‌تر از قضیه اساسی حساب است، تا امروز دارای صدها اثبات می‌باشد. اما آیا قضیه‌ی بزرگی با تنها یک اثبات وجود دارد؟

در سال ۱۹۳۰، کورت گودل، قضیه‌ی مهمی را منتشر کرد: برنامه‌ی سازگاری هیلبرت نمی‌تواند اجرا شود. سپس برای نشان دادن این مطلب دو قضیه را به اثبات رساند.

قضیه ۱.۰.۱. **(*قضیه اول ناتمامیت*)** *فرض کنید که T یک نظریه صوری شامل حساب باشد، آن‌گاه یک جمله‌ی φ وجود دارد که اثبات‌ناپذیر بودن خودش را بیان می‌کند و به گونه‌ای است که:*

(۱) *اگر T سازگار باشد، $T \nvdash \varphi$*

(۲) *اگر T، $\omega-$سازگار باشد، $T \nvdash \neg\varphi$*

قضیه ۲.۰.۱. **(*قضیه دوم ناتمامیت*)** *اگر T یک نظریه صوری سازگار شامل حساب باشد، آن‌گاه*

$$T \nvdash Con_T$$

جایی که Con_T بیانگر سازگاری T است.

اکنون اثبات‌هایی از این قضایای تحسین برانگیز را می‌بینیم.

۱.۱ طرح اثبات برای قضیه‌ی اول

اثبات با استفاده از تناقض دارای سه بخش اساسی است. برای شروع، یک سیستم صوری مطابق با معیارهای پیشنهادی انتخاب می‌کنیم.

۱. جملات در سیستم می‌توانند با اعداد طبیعی (معروف به اعداد گودل) نمایش داده شوند. اهمیت این امر در آن است که خصوصیات جملات، مثل راستی و ناراستی آن‌ها معادل با مشخص کردن این است که آیا اعداد گودل‌شان ویژگی خاصی دارند یا نه. به این ترتیب، ویژگی‌های جملات می‌توانند با بررسی اعداد گودل‌شان نشان داده شوند.

۲. در سیستم صوری، امکان ساختن عددی که جملات مطابق آن به هنگام تعبیر شدن، خود-ارجاع هستند وجود دارد و اساساً می‌گوید که آن (یعنی خود جمله) اثبات‌ناپذیر است. این عمل با استفاده از تکنیکی به نام «قطری‌سازی» انجام می‌شود که به خاطر الهام گرفتن از روش قطری کانتور این نام را گرفته است.

۳. در سیستم صوری، این جملات اجازه‌ی نمایشی را در سیستم می‌دهند که نه اثبات‌پذیر است، نه اثبات‌ناپذیر؛ و به این ترتیب در حقیقت سیستم نمی‌تواند $\omega-$سازگار باشد. از این رو فرض اولیه که سیستم پیشنهادی شرایطی را داشته باشد، غلط است.

در این فصل یک اثبات جدید ساده از قضیه‌ی اول ناتمامیت گودل به فرم زیر ارائه خواهد شد: *الگوریتمی که خروجی آن شامل همه جملات درست باشد و شامل هیچ نادرستی نباشد، وجود ندارد.* اثبات ما کاملاً با اثبات معمولی آن متفاوت است و پیش فرضمان تنها آشنایی مختصری با منطق ریاضی صوری است (منطق صوری یک مجموعه از قوانین است برای ساختن استنتاج‌هایی که خود آشکار به نظر می‌رسند. در منطق صوری، یک سیستم صوری شامل یک زبان صوری و یک مجموعه از قواعد استنتاج است که برای به دست آوردن یک عبارت از یک یا چند فرض دیگر استفاده می‌کند). اثبات مورد نظر با استفاده از پارادوکس بِری[۱] به انجام می‌رسد. نسخه‌های گوناگونی از پارادوکس بِری موجود است. مضمون نسخه‌ی اصلی آن که توسط برتراند راسل منتشر و به آقای ج. بِری کتابدار دانشگاه آکسفورد نسبت داده شد، این است که «کوچک‌ترین عدد صحیح توصیف‌ناپذیر با کمتر از نوزده بخش، شامل ۱۸ بخش است، ازاین‌رو کوچک‌ترین عدد صحیح توصیف‌ناپذیر با کمتر از نوزده بخش، با ۱۸ بخش توصیف می‌شود» که یک تناقض است.

قبل از شروع باید راجع به الگوریتم‌ها و «جملات حسابی» و راجع به معانی «درست» و «نادرست» در متن حاضر صحبت کنیم. با «جملات حسابی» شروع می‌کنیم. زبان حسابی شامل علائم + و × برای جمع و ضرب است و یک اسم ۰ برای صفر، علامت s برای تابع تالی، همچنین شامل علامت تساوی = به اضافه‌ی علائم منطقی معمول $\neg$ (نقیض)، $\wedge$ (و)، $\vee$ (یا)، $\rightarrow$ (اگر...آنگاه...)، $\leftrightarrow$ (...اگر وتنها اگر...)، $\forall$ (به ازای هر) و $\exists$ (وجود دارد) و پرانتزها می‌باشد. متغیرهای زبان حسابی

[۱] Berry's Paradox

عبارات $x, x', x'', \ldots$ می‌باشند که از نماد x و $'$ تشکیل شده‌اند و فرض شده است که اعداد طبیعی $(\circ, ۱, ۲, \ldots)$ را به عنوان مقادیرشان اختیار کنند. متغیرها را با حروف y, z و غیره خلاصه نویسی خواهیم کرد.

اکنون به اندازه‌ی کافی به مفهومی از درستی و نادرستی در زبان حسابی رسیده ایم. به عنوان مثال، $\forall x \exists y\ (x = sy)$ یک جمله ی غلط است، زیرا در اعداد طبیعی، هر عدد طبیعی x تالی عدد طبیعی y نیست (مثل صفر که تالی هیچ عدد طبیعی نیست). از طرف دیگر

$$\forall x \exists y (x = (y + y) \vee x = s(y + y)) \qquad (۱.۱)$$

یک جمله ی درست است، زیرا برای هر عدد طبیعی x عدد طبیعی y وجود دارد به طوری که $x = ۲y$ یا $x = ۲y + ۱$. همچنین بسیاری از مطالب وجود دارند که می‌توانند در زبان حسابی بیان شوند. برای مثال کمتر بودن $x < y$، می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$\exists z (sz + x) = y \qquad (۲.۱)$$

در واقع برای هدف ما، صوری بودن بیشتر از آن مقدار که درباره‌ی نحو و معنای زبان حسابی بوده، لازم نیست.

منظور از الگوریتم یک روند یا جریان محاسباتی (اتوماتیک، موثر، مکانیکی) از نوع معمول است. به طور مثال یک برنامه‌ی کامپیوتری در زبانی مانند C، $Basic$، $Lisp$ و ... یک ماشین تورینگ، ماشین ثبت، الگوریتم مارکوف، یک سیستم صوری مانند حساب پئانو یا حساب رابینسون و ... یا هر چیز مشابه دیگر.

فرض می‌کنیم که هر الگوریتمی لااقل یک خروجی داشته باشد. خروجی مجموعه‌ی چیزهایی است که الگوریتم بعد از انجام عملیات آن‌ها را چاپ می‌کند (البته ممکن است یک الگوریتم خروجی تهی داشته باشد). اگر الگوریتم، یک سیستم صوری باشد آن‌گاه خروجی آن تنها جملاتی است که در سیستم، قابل اثبات باشند.

اگرچه زبان حساب تنها شامل نمادهای عملیاتی s ، $+$ و $\times$ می‌باشد، اما معلوم شده است که بسیاری از جملات ریاضی می‌توانند به صورت جملاتی در زبان حسابی بیان شوند؛ مانند گزاره‌های

اثبات نشده‌ی معروف: قضیه‌ی آخر فرما[1]، حدس گلدباخ، فرض ریمان و اعتقاد تقریبا همگانی $P \neq NP$. بنابراین اگر الگوریتمی وجود داشت که خروجی آن، تنها همه جملات درست حسابی باشد (همان گونه که قضیه گودل به ما می‌گوید که چنین چیزی وجود ندارد)، راهی برای یافتن این که آیا هریک ازاین گزاره‌های اثبات نشده درست‌اند یا نه وجود داشت. برای دیدن این مطلب فرض کنید چنین الگوریتمی موجود باشد؛ الگوریتم را شروع می‌کنیم، به سادگی صبر می‌کنیم تا ببینیم الگوریتم کدام یک از S و $\neg S$ را چاپ می‌کند؟ (اگر خروجی همه‌ی درست‌ها باشد و نادرستی نباشد، بالاخره باید از S یا $\neg S$ دقیقاً یکی انتخاب شود زیرا به طور حتم یا S درست است یا $\neg S$). اما در این مورد که ممکن است زیاد طول بکشد تا الگوریتم به جوابی برای سوال مورد علاقه‌ی ما برسد نگرانی وجود ندارد. همین طور که در ادامه نشان خواهیم داد هیچ الگوریتمی وجود ندارد که این چنین عمل کند، حتی یک الگوریتم بسیار بسیار کُند نیز وجود ندارد.

برای نشان دادن اینکه الگوریتمی وجود ندارد که خروجی آن شامل همه جملات درست حسابی باشد و هیچ نادرستی نداشته باشد، فرض می‌کنیم M الگوریتمی باشد که خروجی آن شامل هیچ جمله نادرست حسابی نیست. نشان خواهیم داد که چطور یک جمله درست حسابی بیابیم که در خروجی M نباشد؛ و این مسئله، قضیه را به اثبات خواهد رساند.

برای هر عدد طبیعی n، $\overline{n}$ را عبارت شامل ۰ به همراه n تا نماد تالی s در نظر می‌گیریم. برای مثال $sss0$ ، $\overline{3}$ است. توجه کنید که عبارت $\overline{n}$، عبارتی برای بیان عدد n است.

یک تعریف دیگر نیاز داریم: می‌گوییم فرمول $F(x)$ عدد طبیعی n را نام‌گذاری می کند اگر جمله زیر در خروجی M باشد:

$$\forall x(F(x) \leftrightarrow x = \overline{n}). \tag{۳.۱}$$

بنابراین برای مثال اگر

$$\forall x(x + x = ssss0 \leftrightarrow x = ss0) \tag{۴.۱}$$

در خروجی M باشد، آن‌گاه فرمول $x + x = ssss0$ عدد ۲ را نام‌گذاری می‌کند. هیچ فرمولی دو عدد متفاوت را نام‌گذاری نمی‌کند. برای اینکه اگر هر دو فرمول $\forall x(F(x) \leftrightarrow x = \overline{n})$ و

[1] این حدس اکنون ثابت شده است و در زمان نگارش مقاله ی اصلی، نامعلوم بود.

$\forall x(F(x) \leftrightarrow x = \overline{p})$ درست باشند، آن‌گاه داریم $\forall x(x = \overline{n} \leftrightarrow x = \overline{p})$ و از آن‌جا $\overline{n} = \overline{p}$، پس عدد n باید با عدد p مساوی باشد. به علاوه برای هر عدد i تعداد متناهی فرمول مختلف وجود دارد که شامل i نماد است، چون ۱۶ تا نماد ابتدایی از زبان حسابی وجود دارد، پس حداکثر ۱۶^i فرمول شامل i نماد وجود دارد. بنابراین برای هر i تنها تعداد متناهی عدد نام‌گذاری شده توسط فرمول‌های i نمادی وجود دارد. آن‌گاه برای هر m تنها تعداد متناهی عدد توسط فرمول‌های شامل کمتر از m نماد نام‌گذاری شده‌است. بعضی اعداد با فرمولی کمتر از m نماد نام‌گذاری نمی‌شوند؛ و به این ترتیب کوچک‌ترین عدد که با فرمولی کمتر از m نماد نام‌گذاری نمی‌شود، وجود دارد.

$C(x, z)$ را فرمولی از زبان حسابی بگیرید بیانگر این که x یک عدد است که توسط فرمولی شامل z تا نماد نام‌گذاری شده است. واقعیت تکنیکی که نیاز داریم و در بالا ذکر شده این است که برای هر الگوریتم M از هرگونه که باشد، چنین فرمول $C(x, z)$ ای وجود دارد. طرح اولیه دستور ساخت $C(x, z)$ در تبصره‌ی ۳ آمده است.

اکنون $B(x, y)$ را فرمول $\exists z(z < y \wedge C(x, z))$ قرار دهید. $B(x, y)$ می‌گوید که x توسط فرمولی با کمتر از y تا نماد نام‌گذاری شده است.

$A(x, y)$ را فرمول $\neg B(x, y) \wedge \forall z(z < x \rightarrow B(z, y))$ در نظر می‌گیریم. $A(x, y)$ می‌گوید x کوچکترین عدد نام‌گذاری نشده توسط فرمولی با کمتر از y تا نماد است.

عدد k را تعداد نمادهای $A(x, y)$ در نظر بگیرید. داریم $k > ۳$.

بالاخره $F(x)$ را فرمول $\exists y(y = (\overline{۱۰} \times \overline{k}) \wedge A(x, y))$ قرار دهید.

$F(x)$ می‌گوید که x کوچک‌ترین عدد نام‌گذاری نشده توسط فرمولی با کمتر از $۱۰k$ تا نماد است. F شامل چه تعداد نماد است؟ خوب، $\overline{۱۰}$ شامل ۱۱ تا نماد، $\overline{k}$ شامل $k + ۱$ تا، $A(x, y)$ شامل k تا و به اضافه‌ی ۱۲ تای دیگر (چون y مختصر شده‌ی x' است)، در کل $۲k + ۲۴$ تا نماد می‌شود. چون $k > ۳$، $۲k + ۲۴ < ۱۰k$ و $F(x)$ کمتر از $۱۰k$ تا نماد دارد. در بالا دیدیم که برای هر m، یک کوچک‌ترین عدد وجود دارد که توسط هیچ فرمولی با کمتر از m تا نماد نام‌گذاری نمی‌شود. n را آن کوچک‌ترین عدد برای $m = ۱۰k$ با خصوصیات بالا در نظر بگیرید. آن‌گاه n با $F(x)$ نام‌گذاری نمی‌شود؛ به عبارت دیگر $\forall x(F(x) \leftrightarrow x = \overline{n})$ در خروجی M نیست. اما $\forall x(F(x) \leftrightarrow x = \overline{n})$ یک جمله‌ی درست است، چون n کوچک‌ترین عددی است که توسط هیچ فرمولی با کمتر از

$10k$ تا نماد نام‌گذاری نمی‌شود. بنابراین یک جمله درست یافتیم که در خروجی M نیست، یعنی $\forall x(F(x) \leftrightarrow x=\overline{n})$ و اثبات تمام است.

چند تبصره در ارتباط با اثبات:

۱. در اثبات ما نمادها «بخش‌ها» (یا «سیلاب‌ها») هستند و درست مثل "$nineteen$" که شامل دو بخش است و کوچک‌تر از ۱۹ است، بنابراین ترم $(\overline{10}\times\overline{k})$ شامل $10k \ll 15+k$ تا نماد است.

۲. جورج کرایسل در یادداشت خود از زندگی نامه و تجارب کُرت گودل، گزارش می‌دهد که گودل، موفقیت خود را خیلی نتیجه‌ی نوآوری‌ها ریاضیات نمی‌داند؛ بلکه نتیجه‌ی توجه به تفاوت‌های فلسفی می‌داند. جرج شایتین[1] این گونه بیان می‌کند که یکی از اثبات‌های ناتمامیتِ خودش به جای پارادوکس دروغگوی اِپیمنیدِس[2] «آنچه اکنون دارم می گویم درست نیست»، شبیه به پارادوکس بِری است. دراثباتهای شایتین از مفهوم پیچیدگی یک عدد طبیعی، یعنی کوچک‌ترین عدد دستورالعمل، در جدول ماشینِ هر ماشین تورینگی که آن عدد را در خروجی چاپ می‌کند و مفاهیم متنوع دیگر نظریه‌ی اطلاعات استفاده شده است. از آن‌جایی که توضیحات کرایسل و شایتین،که نویسنده آنها را کمابیش همزمان خواند، انگیزه‌ای بوجود نیاوردند، هیچ یک از آن مفاهیم در اثبات مورد استفاده قرار نگرفتند.

۳. اکنون طرح اولیه‌ی دستور العمل یک فرمول $C(x,z)$ که می‌گوید x عددی است که توسط فرمولی با z تا نماد نام‌گذاری می‌شود را شرح می‌دهیم. نکته‌ی مهم این است که الگوریتم‌هایی شبیه M می‌توانند به عنوان عملگر روی «عبارات»، یعنی دنباله‌های متناهی از نمادها، فرض شوند. همانند روشی یادآور کدهای $ASCII$، نمادها می‌توانند با اعداد کد شوند (منطق‌دان‌ها اغلب این کدهای عددی را اعداد گودل می نامند). ترفندهای خاص نظریه‌ی اعداد قادر به کد کردن عبارات به صورت اعداد و انجام عملیات روی عبارات به صورت عملیات روی اعدادی که آنها را کد می کنند، می‌باشد. به علاوه این عملیات عددی همه می‌توانند بر حسب جمع، ضرب و ایده‌هایی از منطق تعریف شوند. به این ترتیب بحث نمادها، عبارات (و دنباله‌ی متناهی از عبارات و غیره) می‌توانند

[1] Gregory Chaitin
[2] Epimenides

در زبان حسابی به صورت مبحث اعداد طبیعی که آنها را کد می کنند، کدگذاری شوند. برای ساختن یک فرمول که بیانگر این مطلب باشد که n با فرمولی شامل i تا نماد توصیف شده است، می‌توان فرمولی را نوشت که می‌گوید یک دنباله از عملیات الگوریتم Mای (که روی عبارات عمل می کند) وجود دارد که عباراتی شامل $\forall$، x، (i تا نماد از بعضی از فرمول های $F(x)$ از زبان حسابی، $\leftrightarrow$، x، $=$، n نماد تالی بلافاصل s، ۰، و...) را تولید می‌کند. عددگذاری گودل و ترفندهای نظریه اعداد اجازه می‌دهند چنین بیانی از نمادها، دنباله‌ها و عملیات روی M به صورت فرمول‌هایی از حساب کد شوند.

۴. هم اثبات ما هم اثبات استاندارد آن از عددگذاری گودل استفاده می کنند. به علاوه درستی‌های اثبات‌ناپذیر در اثبات ما و در اثبات استاندارد آن، می‌توانند به عنوان جایگزین یک اسم برای یک عدد در یک فرمول خاص به دست آمده باشند. به هر حال یک تفاوت مهم بین دو اثبات وجود دارد. در اثبات معمولی، عددی که اسم آن جایگزین شده است، کد فرمولی است که در آن جای‌گذاری شده است و در اثبات ما، عدد منحصر به فردی است که فرمول در آن درست است. با این تفاوت بیان این مطلب که اثبات ما متفاوت با اثبات معمول آن، شامل قطری‌سازی نمی‌شود به نظر موجه می‌رسد.

پیوست. نامه‌ای از جرج بولوس [۱]

چند تن از خوانندگان این مقاله‌ی من راجع به مختصر و کوتاه بودن آن نظر داده‌اند. ظاهراً فرض بر این است که استفاده از پارادوکس بِری موجب ایجاز آن می‌شود. می‌توان گفت هنگامی که نحو به صورت حسابی تبدیل می‌شود حتی اثبات مختصرتری به دست می‌آید که اساساً یکی از آنها توسط خود گودل در مقدمه‌ی نوشته‌ی معروفش «که در آن اولین بار قضیه‌ی ناتمامیت اش را ثابت کرد» آورده شده است. وقتی $F(x)$ فرمولی با عدد گودل m است، می‌گوییم m روی n عمل می‌کند اگر $F(\overline{n})$ خروجی M باشد. $A(x,y)$ را بیانگر «عمل می‌کند روی» و n را عدد گودل $\neg A(x,y)$ قرار دهید. اگر n روی n عمل کند، جمله‌ی نادرست $\neg A(\overline{n},\overline{n})$ در خروجی M ظاهر می‌شود که غیرممکن است. بنابراین n روی n عمل نمی‌کند و $\neg A(\overline{n},\overline{n})$ فرمول درستی است که در خروجی M نیست.

[1] George Boolos

آن چه در این بحث نهفته است کارهای زیادی است که برای ساختن یک فرمول مناسب $A(x, y)$ مورد نیاز است. اثبات وجود فرمول کلیدی $C(x, y)$ در «اثبات جدید» با پارادوکس بِری، حداقل نیازمند تلاش بسیار است. علاقه‌ی نویسنده به اثبات با پارادوکس بِری به خاطر ایجاز آن نیست بلکه این شیوه‌ی اثبات دلیلی دیگر و متفاوت برای ناتمامیت الگوریتم‌ها ارائه می‌دهد.

۲.۱ یادداشتی در مورد اثبات بولوس از قضیه‌ی ناتمامیت

اثبات بولوس از بسیاری جهات قابل توجه است. برای مثال، همان طور که بیان شد، شامل هیچ استدلال قطری نیست. به این ترتیب، نسخه‌ی فوق از قضیه‌ی ناتمامیت ضعیف‌تر از قضیه‌ی ناتمامیت گودل است: هر توسیع $\omega-$سازگار به طور بازگشتی اصل‌پذیر از حساب پئانو ناتمام است. از این رو، قضیه‌ی دوم ناتمامیت از اثبات بولوس نتیجه نمی‌شود. با استفاده از روش بولوس اثباتی از قضیه‌ی اول ناتمامیت ارائه شد و اکنون از آن دومین قضیه‌ی ناتمامیت را به صورت نظریه مدلی نتیجه خواهیم گرفت. اثبات دومین قضیه‌ی ناتمامیت، از اثبات کرایسل [۱۲] و یک کاربرد از قضیه‌تمامیت حسابی شده، الهام گرفته شده است. برای ساده تر شدن مسئله، نتایج را تنها روی حساب پئانو بیان می‌کنیم، چون این اثبات برای هر توسیع به طور بازگشتی اصل پذیر از حساب پئانو قابل انجام است.

۳.۱ مقدمات

$\mathcal{L}_{PA} = \{+, \cdot, ۰, ۱, <\}$ را زبانی مرتبه اول از حساب قرار دهید. حساب پئانو که با PA نشان داده می‌شود، نظریه‌ای در $\mathcal{L}_{PA}$ است که شامل اصول نیم‌حلقه‌های به طور گسسته مرتب با ۱ و طرح اصل استقراست. یک فرمول φ در $\mathcal{L}_{PA}$، $\Delta_۰$ نامیده می‌شود هرگاه شامل هیچ سور نامحدودی نباشد و $\Sigma_۱$ نامیده می‌شود هرگاه φ فرمولی به فرم $(\exists x_۱ \cdots \exists x_k)\psi$ برای $\Delta_۰-$فرمول ψ باشد. توجه داریم که در PA، هرگاه φ یک $\Sigma_۱-$فرمول باشد، $(\forall x < t)\varphi$ و $(\exists x < t)\varphi$ نیز معادل $\Sigma_۱-$فرمول می‌باشند. یک رابطه‌ی $R \subseteq \mathbb{N}^k$، شمارای کارآمد است اگر و تنها اگر $\Sigma_۱-$فرمول $\varphi(x_۱, \cdots, x_k)$ وجود داشته باشد به طوری که

برای $(n_۱, \cdots, n_k) \in \mathbb{N}$، $\qquad (n_۱, \cdots, n_k) \in R \Longleftrightarrow \mathbb{N} \models \varphi(n_۱ \cdots, n_k)$.

گوییم PA، $\omega-$سازگار است هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

برای هر فرمول $\varphi(x)$ در $\mathcal{L}_{PA}$، اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\varphi(n)$ از PA استنتاج‌پذیر باشد، $(\exists x)\neg\varphi(x)$

از PA استنتاج‌پذیر نیست.

گزاره ۱.۳.۱. *برای هر Σ_1−جمله‌ی φ در $\mathcal{L}_{PA}$*

(i) *$PA \vdash \varphi$ اگر φ درست باشد.*

(ii) *اگر PA، ω−سازگار باشد و $PA \vdash \varphi$، φ باید درست باشد.*

برهان. (i) در حالت کلی‌تر (برای حساب رابینسون) در قضیه‌ی ۵.۰.۲ ثابت خواهیم کرد.

(ii) برای اثبات این قسمت فرض (خلف) می‌کنیم که φ درست نباشد یعنی $\mathbb{N} \not\models \varphi$. در اینصورت $\mathbb{N} \models \neg\varphi$. با توجه به صورت گزاره، φ، یک Σ_1−فرمول است، پس $\varphi \equiv \exists \mathbf{x}\ \theta(\mathbf{x})$ که نتیجه می‌دهد $\mathbb{N} \models \forall \mathbf{x}\ \theta(\mathbf{x})$. در این صورت $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \mathbb{N} \models \neg\theta(n)$. اما از آنجا که θ، یک Δ_0−فرمول است، $\neg\theta$ نیز یک Δ_0−فرمول، و در نتیجه یک Σ_1−فرمول درست است. با استفاده از قسمت (i) داریم: $\forall n \in \mathbb{N} \quad PA \vdash \neg\theta(n)$. در نهایت $PA \vdash \exists \mathbf{x}\ \theta(\mathbf{x})$، که با ω−سازگاری PA در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. $\square$

فرض کنید $Pr_{PA}(x)$ یک Σ_1−فرمول باشد که رابطه‌ای بازگشتی مقدماتی را مشخص می‌کند، به طوری که x، عدد گودل فرمولی است که از PA استنتاج‌پذیر است. سپس $Con(PA)$ و $\omega - Con(PA)$ را به صورت زیر تعریف می‌نماییم.

$Con(PA)$ و $\omega - Con(PA)$ جملاتی در $\mathcal{L}_{PA}$ می‌باشند با این مفهوم که PA به ترتیب سازگار و ω−سازگار است. برای مثال

$$Con(PA) \Longleftrightarrow \neg Pr_{PA}(\ulcorner ۰ = ۱ \urcorner)$$

و

$$\omega - Con(PA) \Longleftrightarrow (\forall x)\Big((\forall y)Pr_{PA}(x(\dot{y})) \to \neg Pr_{PA}((\exists y)\neg x(y))\Big)$$

جایی که $\dot{y}$ عدد یا شماره‌ی y را مشخص می‌کند (یعنی $\dot{y} = ss \ \cdots \ s(۰)$، وقتی s، y بار تکرار می‌شود).

زمانی که $Pr_{PA}(x)$ یک Σ_1−فرمول باشد، نتیجه‌ی زیر برقرار است.

نتیجه ۲.۳.۱. *برای هر جمله φ در $\mathcal{L}_{PA}$:*

(i) اگر φ از PA استنتاج‌پذیر باشد، آن‌گاه $PA \vdash Pr_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner)$

(ii) اگر PA، ω–سازگار باشد و $PA \vdash Pr_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner)$، آن‌گاه φ از PA استنتاج‌پذیر است.

برهان. (i) فرض خلف می‌کنیم که $PA \nvdash Pr_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner)$، آنگاه با توجه به گزاره‌ی قبل $Pr_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ درست نیست. پس با استفاده از تعریف $Pr_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ به این نتیجه می‌رسیم که $PA \nvdash \varphi$. این تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.
(ii) با توجه به فرض و همچنین با استفاده از گزاره‌ی قبل $Pr_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ باید درست باشد، پس با در نظر گرفتن تعریف $Pr_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner)$، $PA \vdash \varphi$. $\square$

متذکر می‌شویم که گزاره ۱.۳.۱ و نتیجه ۲.۳.۱ می‌توانند در PA اثبات شوند. یعنی برای هر Σ_1–جمله φ در $\mathcal{L}_{PA}$ داریم

$$PA \vdash \varphi \to Pr_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner) \qquad (۵.۱)$$

و

$$PA \vdash \omega - Con(PA) \to (Pr_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi) \qquad (۶.۱)$$

و برای هر جمله‌ی ψ در $\mathcal{L}_{PA}$

$$PA \vdash Pr_{PA}(\ulcorner\psi\urcorner) \to Pr_{PA}(\ulcorner Pr_{PA}(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner) \qquad (۷.۱)$$

و هم‌چنین

$$.PA \vdash \omega - Con(PA) \to (Pr_{PA}(\ulcorner Pr_{PA}(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner) \to Pr_{PA}(\ulcorner\psi\urcorner)) \qquad (۸.۱)$$

با توجه به پارادوکس بِری، فرض کنید که یک فرمول $\varphi(x)$ در $\mathcal{L}_{PA}$ یک **عدد صحیح** $n \in \mathbb{N}$ را که n عدد صحیح یکتاست و در $\varphi(x)$ صدق می‌کند، تعریف کند. m_i را کوچک‌ترین عدد صحیح تعریف‌ناپذیر توسط فرمولی در $\mathcal{L}_{PA}$ با کمتر از $i \in \mathbb{N}$ نماد در نظر می‌گیریم. از آن جایی که چنین تعاریفی از m_i ها نمی‌توانند مستقیماً توسط فرمول‌هایی در $\mathcal{L}_{PA}$ بیان می‌شوند، نمی‌توانیم بگوییم m_i تعریف‌پذیر با کمتر از i نماد است، حتی اگر یک تعریف ساده و ابتدایی داشته باشد که با کمتر

از i بخش نوشته شده باشد (یا i حرف یا غیره). با این وجود بولوس نشان داد که اگر نظریه‌ی حساب درست به طور بازگشتی اصل پذیر باشد، $i \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که m_i با فرمولی دارای کمتر از i نماد در $\mathcal{L}_{PA}$ تعریف شده است. وجود چنین m_i ای منجر به تناقض می‌شود. تفاوت بین اثبات ما و بولوس در تعبیر کلمه‌ی «نام» است.

تعریف ۱.۳.۳. فرض کنید $\varphi(v_0)$ یک فرمول در $\mathcal{L}_{PA}$ و n عضوی از $\mathbb{N}$ باشد. گوییم $\varphi(v_0)$، n را تعریف می‌کند اگر فرمول

$$\varphi(\dot{n}) \wedge (\forall x \forall y)\Big(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \to x = y\Big)$$

از PA استنتاج‌پذیر باشد.

توجه کنید که اگر PA سازگار باشد، هر فرمول در $\mathcal{L}_{PA}$ می‌تواند حداکثر یک عضو از $\mathbb{N}$ را تعریف کند. عدد گودل فرمول

$$\varphi(\dot{n}) \wedge (\forall x \forall y)\Big(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \to x = y\Big)$$

را به صورت $\nu(\ulcorner\varphi(v_0)\urcorner, n)$ می‌نویسیم.

$P(x, y)$ را Σ_1–فرمولی قرار دهید که رابطه‌ی بازگشتی مقدماتی «x عدد گودل یک فرمول در $\mathcal{L}_{PA}$ با کمتر از y نماد می‌باشد، که متغیرهایش از میان $v_0, v_1, \cdots, v_{y-1}$ انتخاب می‌شوند و فقط v_0 ممکن است آزاد باشد» را مشخص می‌کند. چون $\mathcal{L}_{PA}$ شامل حداکثر تعداد متناهی نماد غیر منطقی می‌باشد، برای اطمینان می‌توانیم فرض کنیم که برای هر $j \in \mathbb{N}$، n_j در $\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که

$$PA \vdash (\forall x)(P(x, j) \to x < n_j). \tag{۱.۹}$$

فرمول $Q(x, y)$ را برابر

$$(\exists z)(P(z, y) \wedge Pr_{PA}(\nu(z, x)))$$

و فرمول $R(x, y)$ را برابر

$$\neg Q(x, y) \wedge (\forall x < z) Q(z, y)$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید هر دوی $(\forall z < x)Q(z,y)$ و $Q(x,y)$ معادل Σ_1−فرمول هستند و $R(x,y)$ یعنی «کوچک‌ترین عدد تعریف‌ناپذیر توسط $\varphi(v_0)$ که در $(\ulcorner\varphi(v_0)\urcorner, y)$ هم صدق می‌کند». فرض می‌کنیم k تعداد نمادها در $R(x,y)$ و $r = 100 \cdot k$ باشد. آن‌گاه ϱ را ترم بسته‌ی $\dot{100 \cdot k}$ و $S(x)$ را فرمول $R(x,\varrho)$ تعریف می‌کنیم. $S(x)$ یعنی «x کوچک‌ترین عدد صحیح تعریف‌ناپذیر در کمتر از r نماد است». در روشی مشابه با بخش قبل، می‌توانیم ببینیم که تعداد نمادها در $S(x)$ کمتر از r است، پس عدد گودل s فرمول $S(v_0)$، در $P(s,\varrho)$ صدق می‌کند. حال فرض می‌کنیم که PA سازگار باشد. از آن‌جایی که تعداد فرمول‌ها در مجموعه‌ی

$$\{\varphi(v_0) : P(\ulcorner\varphi(v_0), \varrho\urcorner) \quad \text{درست است}\}$$

حداکثر n_r است و هر فرمول حداکثر یک عضو از $\mathbb{N}$ را تعریف می‌کند، حداقل یکی از $0, 1, \cdots, n_r$ توسط هیچ فرمول $\varphi(v_0)$ای در $\mathcal{L}_{PA}$ که در $P(\ulcorner\varphi(v_0)\urcorner, \varrho)$ صدق کند، تعریف‌پذیر نیست. یعنی یک عدد صحیح $m \leq n_r$ در $\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\neg Q(m,\varrho)$ درست است. فرض کنید m کوچک‌ترین عددی باشد که در این خاصیت صدق می‌کند. آن‌گاه m کوچک‌ترین عدد صحیح تعریف‌ناپذیر با کمتر از r نماد است. به وضوح $(\forall z < m)Q(z,\varrho)$، چون معادل با یک Σ_1−جمله‌ی درست روی PA است، در PA استنتاج‌پذیر است.

۴.۱ دومین قضیه‌ی ناتمامیت

اثبات قضیه‌ی اول ناتمامیت به ما می‌گوید که در بعضی مدل‌های غیر استاندارد از حساب پئانو، کوچک‌ترین عدد صحیح تعریف‌ناپذیر در کمتر از r نماد ممکن است مساوی m نباشد. با استفاده از این مسئله و با توجه به قضیه‌ی تمامیت حسابی شده، قضیه‌ی دوم ناتمامیت را اثبات خواهیم کرد. قضیه‌ی تمامیت حسابی شده می‌گوید هر نظریه‌ی سازگار به طور بازگشتی اصل پذیر، یک مدل به طور حسابی تعریف پذیر دارد. فرض کنید T یک نظریه‌ی به طور بازگشتی اصل پذیر در زبان $\mathcal{L}$ و $\mathcal{C}$ یک مجموعه از ثابت‌های جدید بوده و

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \mathcal{C}.$$

اگر در S بتوانیم نشان دهیم مجموعه‌ی

$$\{\sigma \text{ یک جمله در } \mathcal{L} \text{ باشد که در } \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner) \text{ صدق می‌کند} : \sigma\}$$

یک دیاگرام مقدماتی از یک مدل T با جهانی از $\mathcal{C}$ تشکیل می‌دهد، گوییم فرمول $\varphi(x)$ در $\mathcal{L}_{PA}$ یک مدل از T در نظریه‌ی S در $\mathcal{L}_{PA}$ تعریف می‌کند.

قضیه ۱.۴.۱. (*قضیه‌ی تمامیت حسابی شده*). *در $\mathcal{L}_{PA}$ فرمول $Tr_T(x)$ وجود دارد که یک مدل از T در $PA + Con(T)$ تعریف می‌کند جایی که $Cont(T)$ جمله‌ای در $\mathcal{L}_{PA}$ با مفهوم سازگار بودن T است.*

کرایسل قضیه‌ی تمامیت حسابی شده را برای ساختن اثبات‌های نظریه مدلی از قضیه‌ی ناتمامیت به کار برد ([۹]، [۱۲] و [۸] را ببینید). در اثباتی که برای قضیه‌ی دوم ناتمامیت می‌آوریم از نتیجه‌ی زیر که از قضیه‌ی تمامیت حسابی شده بدست می‌آید، استفاده می‌نماییم.

نتیجه ۲.۴.۱. *T را توسیع به طور بازگشتی اصل پذیر از PA و $\mathfrak{M}_0$ را مدلی از $PA + Con(T)$ می‌گیریم. در این صورت یک مدل $\mathfrak{M}_1$ از T وجود دارد به طوری که*

(i) *برای هر جمله‌ی φ در $\mathcal{L}_{PA}$ داریم $\mathfrak{M}_1 \models \varphi$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{M}_0 \models Tr_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$.*

(ii) *برای هر Σ_1–جمله‌ی φ در $\mathcal{L}_{PA}$ داریم $\mathfrak{M}_0 \models \varphi$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{M}_1 \models \varphi$.*

گوییم مدل $\mathfrak{M}_1$ از T در مدل $\mathfrak{M}_0$ از $PA + Con(T)$ تعریف پذیر است و هم‌چنین می‌نویسیم $\mathfrak{M}_1 \prec_d \mathfrak{M}_0$ اگر $\mathfrak{M}_0$ و $\mathfrak{M}_1$ در شرایط (i) و (ii) از نتیجه ۲.۴.۱ صدق کنند.

برای اثبات قضیه ۱.۴.۱ و نتیجه ۲.۴.۱ می‌توانید به [۸] یا [۱۲] مراجعه کنید.

لم ۳.۴.۱. *هرگاه $S(x)$ فرمولی در $\mathcal{L}_{PA}$ و n_r عدد صحیح تعریف شده در بخش قبل باشد، آن‌گاه*

$$.PA \vdash Con(PA) \to (\exists x \leq n_r)S(x)$$

برهان. چون Pr_{PA} در قاعده‌ی وضع مقدم صدق می‌کند، داریم

$$.PA \vdash (\forall x)(\forall y \forall z)(Pr_{PA}(\nu(x,\dot{y})) \wedge Pr_{PA}(\nu(x,\dot{z})) \to Pr_{PA}(\ulcorner\dot{y} = \dot{z}\urcorner))$$

حال با استفاده از رابطه ۵.۱ داریم

$$.PA \vdash Con(PA) \to (\forall y \forall z)(Pr_{PA}(\ulcorner\dot{y} = \dot{z}\urcorner) \to y = z)$$

بنابراین

$$.PA \vdash Con(PA) \to (\forall x)(\forall y \forall z)(Pr_{PA}(\nu(x,\dot{y})) \wedge Pr_{PA}(\nu(x,\dot{z})) \to y = z)$$

از این رو با توجه به رابطه ۹.۱ می‌توانیم نشان دهیم که،

$$.PA \vdash Con(PA) \to \neg Q(0,\varrho) \vee \cdots \vee \neg Q(n_r,\varrho)$$

به این ترتیب $Con(PA) \to (\exists x \leq n_r)S(x)$ در PA استنتاج‌پذیر است. □

قضیه ۴.۴.۱. (*قضیه‌ی دوم ناتمامیت*). *اگر PA سازگار باشد، آن‌گاه $Con(PA)$ در PA استنتاج نمی‌شود.*

برهان. فرض کنید PA سازگار باشد و $Con(PA)$ در PA نتیجه شود. آن‌گاه با استفاده از قضیه‌ی تمامیت، مدل $\mathfrak{M}_0$ از PA وجود دارد. از آن‌جا که

$$،\mathfrak{M}_0 \models Con(PA)$$

و با توجه به فرض $PA \vdash Con(PA)$، با استفاده از لم ۳.۴.۱ یک m_0 در مجموعه‌ی $\{0, \cdots, n_r\}$ وجود دارد به طوری که $\mathfrak{M}_0 \models S(m_0)$. آن‌گاه با توجه به رابطه

$$PA \vdash (\forall x)(Con(PA) \to (S(x) \to \neg Pr_{PA}(\ulcorner \neg Q(\dot{x},\varrho) \urcorner)))$$

داریم

$$\mathfrak{M}_0 \models \neg Pr_{PA}(\ulcorner \neg Q(m_0,\varrho) \urcorner)$$

به این ترتیب

$$.\mathfrak{M}_0 \models Con(PA + Q(m_0,\varrho))$$

بنابراین با استفاده از نتیجه ۲.۴.۱ یک مدل $\mathfrak{M}_1$ از $PA + Q(m_0,\varrho)$ وجود دارد که در $\mathfrak{M}_0$ تعریف‌پذیر است. دوباره با استفاده از لم ۳.۴.۱، m_1 در مجموعه‌ی $\{0, \cdots n_r\}$ وجود دارد که $\mathfrak{M}_1 \models S(m_1)$. به علاوه از آن‌جا که $(\forall x < m_0)Q(x,\varrho)$ یک جمله‌ی درست در $\mathfrak{M}_0$ است و معادل یک Σ_1-جمله روی PA است، چون $\mathfrak{M}_1 \preceq_d \mathfrak{M}_0$ است، در $\mathfrak{M}_1$ نیز درست است. پس

$$\mathfrak{M}_1 \models (\forall x \leq m_0)Q(x,\varrho)$$

و از آن‌جا که $\neg Q(m_۱, \varrho)$ $\mathfrak{M}_۱ \models$ داریم $m_۰ < m_۱$.

با تکرار این ساختار، به یک دنباله‌ی نامتناهی از مدل‌های حساب پئانو به شکل

$$\mathfrak{M}_۰ \succ_d \mathfrak{M}_۱ \succ_d \cdots \succ_d \mathfrak{M}_i \succ_d \cdots$$

و یک دنباله‌ی نامتناهی از اعداد صحیح به شکل

$$m_۰ < m_۱ < \cdots < m_i < \cdots .$$

می‌رسیم. این مسئله با این که m_i ها از $\{۰, \cdots, n_r\}$ انتخاب شده‌اند، در تناقض است. $\square$

فصل ۲

گسترش‌هایی از برهان بولوس

اثبات بولوس از ناتمامیت مستقیماً برای رسیدن به اثبات‌های ساده‌ی «بدون قطری‌سازی»، از بعضی قضایای انحصاری کلاسیک از منطق، توسیع داده شده است.

گودل در مقاله‌ی معروفش حین اعلان قضیه‌ی ناتمامیت، اظهار داشت که اگرچه استدلالش مشابه پارادوکس‌های دروغگو و ریچارد است؛ «هر متناقض‌نمای معرفت شناختی می‌تواند برای یک اثبات مشابه از وجود گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر استفاده شود (نکته ۱۴ از [۵] را ببینید)». جالب است علی‌رغم این حقیقت که درستی استدلال‌هایی مانند استدلال گودل که بر مبنای خود-ارجاعی (یا قطری سازی) ساخته شده‌است، اغلب مورد سوال بوده (البته از دیدگاه فیلسوفان نه ریاضیدانان)، اولین تلاش برای حمایت از ادعای گودل و اثبات قضیه (بدون ارجاع به قطری سازی) با استفاده از پارادوکس‌های دیگر اخیراً باب شده است.

در سال ۱۹۹۸، ج. بولوس با بیان پارادوکس بِری مبتنی بر این که *کوچک‌ترین عدد صحیح توصیف‌ناپذیر با کمتر از ۱۹ بخش، درست با ۱۸ بخش نام‌گذاری شده‌است*، نسخه‌ی معنایی قضیه‌ی ناتمامیت را اثبات کرد، تا نشان دهد جملاتی حسابی وجود دارند که درست هستند اما در حساب پئانو قابل اثبات نیستند.

اثبات، همان گونه که بولوس در پایان مقاله‌اش اشاره می‌کند «برخلاف معمول آن، شامل قطری سازی نیست». اثبات بولوس شاید یکی از آن فاکتورهایی باشد که موجی از «اثبات نتایج قدیمی با یک روش جدید» را به پا کرده است [۱].

با این وجود بر خلاف روش‌های نظری اثبات به کار رفته در هر دو برهان گودل و بولوس، بسیاری از این اثبات‌های جدید، روش‌های نظریه مدلی مشخصی را به کار می‌گیرند که به سختی می‌توانند متناهی‌گرایانه در نظر گرفته شود.

از طرف دیگر، برهان بولوس می‌تواند مستقیماً چنان توسیع داده شود که به اثبات‌های ساده‌ای از بعضی قضایای اساسی که رابطه‌ای خیلی نزدیک با قضیه‌ی ناتمامیت دارند، منتهی شود.

دو نسخه‌ی قضیه‌ی اول ناتمامیت گودل (نسخه‌های معنایی و نحوی) با یکدیگر به همراه قضیه‌ی گودل-راسر، قضیه‌ی چرچ[۲] درباره‌ی تصمیم‌ناپذیری اثبات‌پذیری و قضیه‌ی تارسکی[۱] در

[۲] Church's theorem

[۱] Tarski's theorem

مورد تعریف‌ناپذیری درستی، تا حدی تشکیل دور کاملی از جملات متناسب دوطرفه‌ای می‌دهند که به بعضی از سوالات اساسی درباره‌ی درستی و اثبات‌پذیری پاسخ می‌دهند.

این حقیقت که برهان‌های استاندارد اساساً دارای ساختار مشابه می‌باشند، شاهدی برای رابطه‌ی نزدیک بین این نتایج اساسی است. این ها همه می‌توانند از یک نسخه‌ی عمومی و صوری پارادوکس دروغگو به دست آیند، یعنی می‌توانند به صورت تحلیل صوری متفاوتی از این پارادوکس بررسی شوند.

اکنون همانطور که در زیر نشان خواهیم داد با قرار دادن پارادوکس بِری به جای پارادوکس دروغگو می‌توان بحث تقریبا مشابهی را مطرح کرد. در واقع بدون هیچ تغییر اساسی، ایده‌ی متضمن برهان بولوس برای قضیه ناتمامیت می‌تواند برای خلق اثبات‌هایی از همه‌ی قضایای اساسی تصمیم‌ناپذیری که در بالا ذکر شد، استفاده شود. بعد از نمادگذاری و ارائه‌ی تعاریف اساسی، ابتدا اثبات بولوس را با جزییات بیشتر از آنچه در اثبات اصلی داده شده، تکرار می‌کنیم. سپس می‌توان اثبات را در جهتی متفاوت ادامه داد. این درست روند عملیاتی است که ما قصد انجام آن را داریم.

ابتدا یکی از زبان‌های استاندارد مرتبه اول حساب را تعیین می‌کنیم. منظور از یک فرمول (به ترتیب جمله، ترم و ...)، یک فرمول (به ترتیب جمله، ترم و ...) در این زبان است. نظریه‌ها، مجموعه‌ای دلخواه از جملات هستند. حساب رابینسون را با Q و مدل استاندارد Q را با ω نشان خواهیم داد. یک جمله را درست (یا تعریف‌پذیر) گوییم هرگاه جمله‌ی مورد بررسی در ω درست (یا تعریف‌پذیر) باشد. متغیرها $v_0, v_1, \cdots, v_i, \cdots$ می‌باشند.

اگر مشخص کردن تفاوت بین ترم‌های بسته‌ی $0, s0, ss0, \cdots$ و مقادیرشان در ω (یعنی اعداد طبیعی $0, 1, 2, \cdots$) لازم به نظر برسد، ترم‌ها را با نسخه‌ی زیرخط‌دار مقادیرشان مشخص خواهیم کرد، اما از آن جایی که دلیلی برای سردرگمی نیست به عنوان یک قانون، خط زیرین را حذف می‌کنیم. عموماً ارزش یک ترم بسته در ω با پررنگ شده‌ی حرفی که مشخصه‌ی ترم است نشان داده خواهد شد. یکی از کدگذاری‌های استاندارد گودل را انتخاب می‌کنیم. برای هر فرمول μ، $\ulcorner\mu\urcorner$ عدد گودل μ را مشخص خواهد کرد.

«اگرر» را به جای «اگر و تنها اگر» استفاده می‌کنیم و اغلب از نماد « $\doteq$ » برای بیان این که تساوی مربوطه یک تعریف است، استفاده می‌شود.

یک فرمول را Σ_1 می‌گوییم اگر برای Δ_0–فرمولی (یعنی کران‌دار) مثل μ به فرم $\exists v_i \mu$ باشد.

Σ_1–رابطه‌ها توسط یک Σ_1–فرمول، تعریف می‌شوند. یک فرمول Σ است اگر در Q به طور اثبات‌پذیری معادل اعضایی از کوچک‌ترین مجموعه‌ی شامل همه‌ی Δ_0–فرمول‌ها باشد (یعنی اشتراک تمام چنین مجموعه‌هایی) و تحت اجتماع، اشتراک، سورهای وجودی و سور عمومی محدود، بسته باشد. به علاوه یک فرمول Δ گفته می‌شود (یا یک Δ–فرمول) اگر هم خود فرمول هم نقیضش Σ باشند. یک Σ–جمله (Δ–جمله) یک Σ–فرمول (Δ–فرمول) است که جمله است. به وضوح یک Σ_1–فرمول، Σ– فرمول نیز هست. یک رابطه Σ (Δ–رابطه) نامیده می‌شود اگر توسط یک Σ–فرمول (Δ–فرمول)، تعریف‌پذیر باشد. به راحتی می‌توان چک کرد که یک رابطه Σ است اگرر Σ_1 باشد (یعنی شمارای کارآمد) و یک رابطه Δ است اگرر Δ_1 باشد (یعنی بازگشتی). یک استقرای مستقیم روی پیچیدگی فرمول‌های مشابه آنچه در [۳] و [۶] می‌توان یافت، نشان می‌دهد نظریه Q، Σ–تمام است یعنی همه‌ی Σ–جمله‌های درست در Q اثبات‌پذیر هستند.

قضیه ۵.۰.۲. *Q، Σ_1–تمام است.*

برهان. می‌توان قضیه را با اثبات موارد زیر نشان داد:

۱. Q به طور صحیح درباره‌ی هر جمله‌ی اتمی تصمیم می‌گیرد.

۲. Q، به طور صحیح درباره‌ی هر Δ_0–جمله تصمیم می‌گیرد.

۳. Q، هر Σ_1–جمله‌ی درست را ثابت می‌کند.

اثبات (۱): جمله‌ی اتمی، یعنی یک فرمول خوش ساخت، بدون متغیر آزاد که یا (۱) یک معادله‌ی $\tau_1 = \tau_2$ است یا (۲) یک فرمول خوش ساخت به فرم $\tau_1 \leq \tau_2$ است. (جایی که τ_1 و τ_2 ترم‌های بسته‌ای هستند که به ترتیب t_1 و t_2 را مشخص می‌کنند). در مورد حالت اول، از قبل می‌دانیم که Q به طور صحیح درباره‌ی هر معادله تصمیم می‌گیرد. در حالت دوم باز هم چون می‌دانیم که Q به طور صحیح درباره‌ی هر معادله تصمیم می‌گیرد، می‌تواند یک زوج از فرمول‌های خوش ساخت را که ترم‌هایی را ارزیابی می‌کنند، ثابت کند؛ یعنی می‌تواند ثابت کند $t_1 = \tau_1$ و $t_2 = \tau_2$. اما چون

«$\leq$» به معنای رابطه‌ی کوچک‌تر مساوی است، Q به طور صحیح تصمیم می‌گیرد که آیا $\overline{t_1} \leq \overline{t_2}$ یا نه؟ از این رو با توجه به مشخصه‌ها Q به طور صحیح درباره‌ی $\tau_1 \leq \tau_2$ تصمیم می‌گیرد.برای این منظور باید ثابت کنیم که هر ترم بسته‌ی t (برای $n \in \mathbb{N}$) برابر $\overline{n}$ است و نیز باید ثابت کنیم

۱. $Q \vdash \overline{m} + \overline{n} = \overline{m+n}$

۲. $Q \vdash \overline{m} * \overline{n} = \overline{m*n}$

۳. $m \neq n \longleftrightarrow Q \vdash \overline{m} \neq \overline{n}$

۴. $x \leq \overline{n} \leftrightarrow x = \overline{0} \vee x = \overline{1} \vee \cdots \vee x = \overline{n}$

با استقرا روی n اثبات را آغاز می‌کنیم. برای $n = 0$ باید نشان دهیم

$$Q \vdash \overline{m} + \overline{0} = \overline{m}$$

که از اصل ۴ حساب رابینسون یعنی $x + \overline{0} = x$ نتیجه می‌شود. با داشتن اثباتی برای

$$Q \vdash \overline{m} + \overline{n} = \overline{m+n}$$

و انجام عملیات در Q داریم:

$$\overline{m} + \overline{n+1} = \overline{m} + s(\overline{n}) = s(\overline{m} + \overline{n}) = \overline{m+n+1}$$

اثبات قسمت ۲ مشابه قسمت قبل است.

برای اثبات قسمت ۳ کافیست فرض کنیم $n < m$. برای $m = 0$ فرض بی معنی است. فرض می‌کنیم که ادعا برای m صادق باشد و قرار می‌دهیم $n < m + 1$. آنگاه $n = 0$ و اصل اول حساب رابینسون نتیجه می‌دهند $Q \vdash \overline{n} \neq \overline{m+1}$ یا $n = n_0 + 1$ و با توجه به فرض استقرا داریم $Q \vdash \overline{n_0} \neq \overline{m}$. پس با استفاده از اصل ۲ حساب رابینسون داریم $Q \vdash \overline{n} \neq \overline{m+1}$.

برای اثبات قسمت ۴ نیز با استقرا روی n پیش می‌رویم. برای $n = 0$، با توجه به اینکه $x + y = \overline{0} \rightarrow x = \overline{0} \;\&\; y = \overline{0}$، حکم ثابت می‌شود. (اگر $y \neq \overline{0}$، آنگاه برای zای

$y = S(z)$ پس $x + y = S(x+z) \neq \overline{0}$. پس به ناچار $y = 0$. بنابراین $x + 0 = 0$ یا $x = 0$.) اکنون فرض می‌کنیم حکم برای n صادق باشد و برای $n+1$ ثابت می‌کنیم. طرف اول استدلال ($\leftarrow$) با استفاده از قسمت ۱ ثابت می‌شود. بنابراین اثبات را در Q ادامه داده و فرض می‌کنیم $x \leq \overline{n+1}$. اگر $x = \overline{0}$، کار تمام است. بدین ترتیب $x \neq \overline{0}$. پس y وجود دارد که $x = S(y)$. از $S(y) \leq S(\overline{n})$ نتیجه می‌شود $y \leq \overline{n}$. بنابراین با فرض استقرا داریم $\bigvee_{i=0}^{n} y = i$ پس $\bigvee_{i=0}^{n} S(y) = S(i)$ $x = 0 \vee$ یا $x = 0 \vee \bigvee_{j=1}^{n+1} x = j$. بنابراین $\bigvee_{i=0}^{n+1} x = i$. اینکه هر ترم بسته‌ی t، برابر یک $\overline{n}$، (برای $n \in \mathbb{N}$) می‌باشد و Q به طور صحیح درباره‌ی آن تصمیم می‌گیرد، با استفاده از قسمت‌های ۱ و ۲ نشان داده می‌شود برای مثال: $Q \vdash (\overline{3} + \overline{5}) * \overline{8} = \overline{64}$

اثبات (۲): مجدداً می‌گوییم Δ_0−جمله، درجه‌ی k دارد اگر از فرمول‌های خوش ساخت اتمی با k کاربرد از رابطه‌های و/یا سورهای محدود ساخته شده باشد. جملات درجه صفر، جملات اتمی هستند و اکنون می‌دانیم که Q، به طور صحیح درباره‌ی آن‌ها تصمیم می‌گیرد. بنابراین فرض کنید Q به طور صحیح درباره‌ی همه‌ی Δ_0−جمله‌ها تا درجه‌ی k، تصمیم می‌گیرد. نشان خواهیم داد که به طور صحیح درباره‌ی χ، یک جمله‌ی دلخواه با درجه‌ی $k+1$ تصمیم می‌گیرد. همانند قبل، سه حالت برای بررسی وجود دارد:

(آ) χ با استفاده از رابطه‌های گزاره‌ای از φ و شاید ψ، جملاتی درجه پایین‌تر، که با توجه به فرض، Q درباره‌ی آنها تصمیم می‌گیرد، ساخته می‌شود. اما با توجه به منطق مقدماتی، اگر Q به طور صحیح درباره‌ی φ و ψ تصمیم بگیرد، به طور صحیح درباره‌ی $\neg\varphi$، $(\varphi \wedge \psi)$، $(\varphi \vee \psi)$، $(\varphi \rightarrow \psi)$ و $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ نیز تصمیم می‌گیرد.

(ب) χ به فرم $(\forall \zeta \leq \overline{n})\ \varphi(\zeta)$ است.
اگر χ یک جمله‌ی درست باشد، آن‌گاه $\varphi(0), \varphi(1), \cdots, \varphi(\overline{n})$ همه باید جملات درست باشند. با استفاده از فرض درجه‌های پایین‌تر، همه به طور صحیح توسط Q تصمیم‌گیری می‌شوند. بنابراین Q، $\varphi(0), \varphi(1), \cdots, \varphi(\overline{n})$ را ثابت می‌کند.
از این رو با توجه به (برای هر n، اگر $T \vdash \varphi(0), T \vdash \varphi(1), \cdots, T \vdash \varphi(\overline{n})$ آن‌گاه

Q $(T \vdash (\forall x \leq \overline{n})\ \varphi(x)$ همچنین $(\forall \zeta \leq \overline{n})\ \varphi(\zeta)$ را نیز ثابت می‌کند. از طرف دیگر اگر χ نادرست باشد، $\varphi(\overline{k})$ برای kهای کوچک‌تر از n، نادرست است و درجه‌های پایین‌تر به طور صحیح با Q تصمیم‌گیری می‌شوند. (برای $k < n$، $\mathbb{N} \models \neg\varphi(\overline{k})$ و با استفاده از $Q \vdash k < \overline{n} \equiv k = \overline{۰} \vee k = \overline{۱} \vee \cdots \vee k = \overline{n}$ نتیجه می‌شود $(Q \vdash \neg\varphi(\overline{k})$ پس Q، $\neg\varphi(\overline{k})$ را ثابت می‌کند. با توجه به (برای هر n، اگر $T \vdash \varphi(۰)$, یا $T \vdash \varphi(۱)$, یا $\cdots$, یا $T \vdash \varphi(\overline{n})$ آن‌گاه Q $(T \vdash (\exists x \leq \overline{n})\ \varphi(x)$، $(\exists \zeta \leq \overline{n})\ \neg\varphi(\zeta)$ را ثابت می‌کند که به سادگی مستلزم $\neg(\forall \zeta \leq \overline{n})\ \varphi(\zeta)$ می‌باشد. پس Q به طور صحیح درباره‌ی χ تصمیم می‌گیرد یعنی $(\forall \zeta \leq \overline{n})\ \varphi(\zeta)$.

(ج) اگر χ به فرم $(\exists \zeta \leq \overline{n})\ \varphi(\zeta)$ باشد، مشابه حالت (۲) ثابت می‌شود.

در کل Q به طور صحیح درباره‌ی همه‌ی $\Delta_۰$–جملات از درجه‌ی صفر تصمیم می‌گیرد. اگر درباره‌ی همه‌ی $\Delta_۰$–جملات با درجه‌ی بزرگ‌تر از k تصمیم بگیرد، درباره‌ی همه‌ی $\Delta_۰$–جملات با درجه‌ی بزرگ‌تر از $k + ۱$ نیز تصمیم می‌گیرد. بدین ترتیب با یک استقرای غیر صوری روی k درباره‌ی همه‌ی $\Delta_۰$–فرمول‌ها تصمیم می‌گیرد حتی درجات دیگر.

اثبات (۳): برای مثال یک $\Sigma_۱$–جمله از نوع $\exists x \exists y\ \varphi(x, y)$ را در نظر بگیرید، جایی که $\varphi(x, y)$، $\Delta_۰$ است. اگر این جمله درست باشد آن‌گاه برای جفت عددهای m و n، $\Delta_۰$–جمله‌ی $\varphi(\overline{m}, \overline{n})$ باید درست باشد. بدین ترتیب با استفاده از (۲)، Q، $\varphi(\overline{m}, \overline{n})$ را ثابت می‌کند و ازاین‌رو با تعریف وجودی، $\exists x \exists y\ \varphi(x, y)$. به طور بدیهی استدلال به هر تعداد سور اولیه تعمیم می‌یابد، که نشان می‌دهد Q همه‌ی $\Sigma_۱$–جمله‌های درست را ثابت می‌کند. بنابراین معادل‌های منطقی درست‌شان را نیز اثبات خواهد کرد. □

۱.۲ ω–سازگاری

در فصل قبل تعریف مختصری راجع به ω–سازگاری ارائه داده شد. اما برای این که کمی بیشتر درباره‌ی آن صحبت شود، باید بدانیم مفهوم ω–سازگاری توسط گودل و به منظور بیان فرض‌های

مورد نیاز برای قضیه‌ی اول ناتمامیت، تعریف شد. $\omega-$سازگاری T، شرایط به حد کافی بهینه و شهودی را برای قضیه فراهم نمی‌کند. با این وجود، استفاده از آن در این بحث بسیار قاطعانه در موضوعاتی که مجبور به استفاده از آنها هستیم، نفوذ می‌کند. به طور غیر صوری، $\omega-$سازگاری خصیصه‌ای است که برای T برقرار است اگر φ همزمان در دو شرط زیر صادق نباشد:

۱. $T \vdash \exists x\ \varphi(x)$.

۲. $T \vdash \neg\varphi(۰), \neg\varphi(۱), \neg\varphi(۲), \cdots$.

و به طور صوری، $\omega-$سازگاری می‌تواند با (اصلاح) طرح زیر، نمایش داده شود:

$$Pr_T \ulcorner \exists x\ \varphi(x) \urcorner \rightarrow \exists x\ \neg Pr_T\ (\ulcorner \neg\varphi(\dot{x}) \urcorner)$$

(به [۱۲] مراجعه شود.)

تعاریف

۱. برای هر ترم یا فرمول e، تعداد نمادهای موجود در e را با $|e|$ نشان می‌دهیم (این عدد را طول e خواهیم نامید) و $f : \omega^۲ \longrightarrow \omega$ را یک تابع بازگشتی در نظر می‌گیریم به طوری که برای هر فرمول μ و عدد طبیعی i، $f(i, \ulcorner \mu \urcorner) = \ulcorner (\forall v_۰)(\mu \Longleftrightarrow v_۰ = i) \urcorner$ برقرار باشد.

۲. برای هر نظریه‌ی S، مجموعه‌ی اعداد گودل جملات اثبات‌پذیر در S را با $\mathcal{P}r_S$ مشخص می‌کنیم.

۳. اگر T نظریه‌ای دلخواه باشد، رابطه‌های $\mathcal{F}m \subseteq \omega$ و $\mathcal{L}h, \mathcal{N}m \subseteq \omega^۲$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{F}m \doteq \{i \in \omega : \quad i = \ulcorner \mu \urcorner \text{ ، برای فرمول } \mu \text{ با حداکثر یک متغیر آزاد } v_۰ \}$$

$$\mathcal{L}h \doteq \{(i, j) \in \omega^۲ : \quad i = \ulcorner \mu \urcorner \text{ ، برای فرمول } \mu \text{ به طوری که } |\mu| < j \}$$

$$\mathcal{N}m \doteq \{(i, j) \in \omega^۲ : \quad j \in \mathcal{F}m, f(i, j) \in \mathcal{P}r_T\}$$

اگر برای هر فرمول μ و عدد i، $(i, \ulcorner \mu \urcorner) \in \mathcal{N}m$ باشد؛ یعنی اگر $\mu = \mu(v_۰)$ حداکثر دارای یک متغیر آزاد $v_۰$ باشد و $T \vdash (\forall v_۰)(\mu(v_۰) \Longleftrightarrow v_۰ = i)$ آن‌گاه می‌گوییم که فرمول μ عدد i را تعریف

می‌کند.

۴. از تعریف کدگذاری گودل برمی‌آید که کدهای گودلِ فرمول‌هایی که متغیرهایشان همه از میان $\{v_0,\ v_1, \cdots,\ v_n\}$ برای $n \in \mathbb{N}$ انتخاب شده، توسط یک تابع بازگشتی از طولشان محدود شده‌اند. اگر بخواهیم دقیق‌تر بگوییم، در حالتی از کدگذاری گودل، یک تابع بازگشتی g (بسته به کدگذاری مخصوص انتخاب شده) وجود دارد به طوری که برای هر فرمول μ و عدد j وقتی همه‌ی متغیرهای μ بین j تای اول هستند (یعنی برای $j > 1$ همه‌ی آن‌ها در مجموعه‌ی $\{v_0,\ v_1, \cdots,\ v_{j-1}\}$ هستند) $j > |\mu|$ نتیجه می‌دهد $\ulcorner\mu\urcorner < g(j)$. برای مثال، معمول‌ترین کدگذاری گودل را برای بررسی انتخاب می‌کنیم که (با فرض این‌که کدهای گودل نمادهای مقدماتی از زبان مربوطه، قبلاً داده شده است) برای هر دنباله از نمادها به صورت زیر تعریف شده است:

$$\ulcorner(s_0,\ s_1, \cdots,\ s_j)\urcorner = p_0^{\ulcorner s_0\urcorner}.p_1^{\ulcorner s_1\urcorner} \cdots .p_j^{\ulcorner s_j\urcorner}$$

جایی‌که p_i، iامین عدد اول می‌باشد. جدای از متغیرها، زبان ما، به تعداد حداکثر متناهی نمادهای مقدماتی دارد، بنابراین c را می‌توانیم هر عدد بزرگ‌تر از اعداد گودل نمادهای مقدماتی به جز متغیرها، تعریف کنیم. برای هر j، قرار دهید

$$h(j) \doteq max\{c\} \cup \{\ulcorner v_i\urcorner :\ i \leq j\}$$

آن‌گاه برای هر فرمول μ به طوری که $j > |\mu|$ و همه‌ی متغیرهای μ از میان j تای اول باشد، $\ulcorner\mu\urcorner < p_j^{h(j).j}$. به وضوح تابع $g(j) = p_j^{h(j).j}$ بازگشتی است.

اکنون چنین g را انتخاب کرده و رابطه‌ی $\mathcal{B} \subseteq \omega^2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\mathcal{B} \doteq \{(i, j) \in \omega^2, (\ulcorner\mu\urcorner, j) \in \mathcal{L}h, (i, \ulcorner\mu\urcorner) \in \mathcal{N}m$ ،$\ulcorner\mu\urcorner < g(j)$ برای فرمول μ به طوریکه$\}$

۵. $\mathcal{F}m$ و $\mathcal{L}h$ رابطه‌های Δ_1 هستند. فرض کنید $\mathcal{P}r_T$ تعریف‌پذیر باشد (برای مثال اگر مجموعه‌ی کدهای گودل جملات متعلق به T خود تعریف‌پذیر باشد، این شرایط ارضا می‌شود) آن‌گاه $\mathcal{N}m$ و $\mathcal{B}$ نیز تعریف‌پذیر هستند.

(آ) $\varphi(v_0, v_1)$ را فرمولی (با حداکثر دو متغیر آزاد v_1, v_0) معرف رابطه‌ی $\mathcal{B}$ قرار دهید. φ را طوری انتخاب می‌کنیم که وقتی T به طور بازگشتی اصل‌پذیر است، Σ_1 باشد. این امر ممکن است؛ چون در این حالت $\mathcal{P}r_T$، Σ_1 است، بنابراین هر دوی $\mathcal{N}m$ و $\mathcal{B}$ نیز Σ_1 هستند (به یاد آورید که کلاس

روابط شمارای کارآمد، تحت اشتراک، سور وجودی و جایگزینی توابع بازگشتی، بسته است).

توجه داشته باشید اگر یک فرمول μ حداکثر یک متغیر آزاد v_0 داشته باشد و $|\mu| < j$، آن‌گاه با نام‌گذاری دوباره‌ی متغیرهای کران‌دار μ، می توان فرمول μ^* را به گونه‌ای به دست آورد که حداکثر یک متغیر آزاد v_0 داشته باشد، μ و μ^* به طور اثبات‌پذیر در Q معادل باشند، $|\mu| = |\mu^*|$، و همه‌ی متغیرهای μ^* در میان j تای اول قرار داشته باشند؛ پس در راستای تذکر قبلی $\ulcorner \mu^* \urcorner < g(j)$. با توجه به این حقیقت، برای هر عدد i و ترم بسته‌ی s، $\varphi(i,s)$ درست است اگرر یک فرمول μ وجود داشته باشد به طوری که $|\mu| < s$ و μ عدد i را تعریف می‌کند.

(ب) قرار دهید $\psi(v_0,v_1) \doteq \neg\varphi(v_0,v_1) \wedge (\forall v_2 < v_0)\ \varphi(v_2,v_1)$. برای ترم بسته‌ی s، $\psi(i,s)$ درست است اگرر i کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که نمی‌تواند با یک فرمول با طول کمتر از s تعریف شود.

۶. قرار دهید $k_1 \doteq |\psi(v_0,v_1)|$ ؛ هم‌چنین k_2 را هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از تعداد پیشامدهای آزاد v_1 در $\psi(v_0,v_1)$ در نظر بگیرید.

قرار دهید $k = k_1.k_2$ و $t \doteq \underline{10}.(\underline{k}.\underline{k})$. آن‌گاه $k \geq k_1 > 3$ و $k \geq k_2 \geq 1$.

۷. اگر T توسیعی سازگار از Q باشد، آن‌گاه هر فرمول، حداکثر یک عدد را می‌تواند تعریف کند (چون $i \neq j$ نتیجه می‌دهد $Q \vdash i \neq j$). همچنین، فرمول‌های به طور اثبات‌پذیر معادل در T، اعداد یکسان را تعریف می‌کنند (اگر آنها حداقل یک عدد را تعریف کنند). بالاخره، تا حد هم‌ارزی T–اثبات‌پذیر، حداکثر تعداد متناهی فرمول‌های با طول کمتر از یک عدد داده شده و حداکثر یک متغیر آزاد v_0 وجود دارند (یادآوری: به جز متغیرها، زبان ما شامل حداکثر تعداد متناهی نمادهای مقدماتی است، تذکر ۵، (آ) را ببینید). در نتیجه، تعداد حداکثر متناهی از اعداد متفاوت می‌توانند وجود داشته باشند که با فرمول‌هایی با کمتر از یک طول داده شده تعریف شوند. بنابراین کوچکترین عدد وجود دارد که نمی‌تواند با فرمولی به طول کمتر از t تعریف شود. آن را با n مشخص می‌کنیم.

قضیه ۲.۱.۱. *اگر T یک توسیع سازگار از Q و $\mathcal{P}r_T$ تعریف‌پذیر باشد، آن‌گاه $\psi(n,t)$ درست است اما $T \nvdash \psi(n,t)$*

برهان. با استفاده از تعریف، n کوچک‌ترین عددی است که نمی‌تواند توسط فرمولی با طول کمتر

از t تعریف شود و باز با استفاده از تعریف، $\psi(n,t)$ تنها در این حالت درست است. در نتیجه

۱. $\psi(n,t)$ درست است.

از طرف دیگر با توجه به تعریف ψ، (۱) نتیجه می‌دهد

۲. $\varphi(n,t)$ نادرست است. به علاوه به راحتی دیده می‌شود که

۳. اگر $T \vdash \psi(n,t)$ آن‌گاه $\psi(v_0,t)$، n را تعریف می‌کند. در واقع باید نشان دهیم که $T \vdash \psi(n,t)$، $T \vdash (\forall v_0)(\psi(v_0,t) \iff v_0 = n)$ را نتیجه می‌دهد . یک طرف این استدلال صوری بدیهی است: $T \vdash \psi(n,t) \wedge v_0 = n \Longrightarrow \psi(v_0,t)$. طرف دیگر، از این واقعیت که T توسیعی از Q است، نتیجه می‌شود. چون $Q \vdash v_0 \leq i \vee i \leq v_0$ که یک نوع ضعیف از به طور منحصر به فرد اثبات‌پذیر بودن کوچک‌ترین اعضا را نتیجه می‌دهد. اگر بخواهیم دقیق‌تر بگوییم، برای هر فرمول $\mu(v_0)$ و عدد i،

$$Q \vdash \neg\mu(i) \wedge (\forall v_2 < i)\mu(v_2) \Longrightarrow (\forall v_0)[\neg\mu(v_0) \wedge (\forall v_2 < v_0)\mu(v_2) \Longrightarrow v_0 = i]$$

اینک از $k > 3$ نتیجه می‌شود $18k < 8k^2$. بنابراین، تعریف t منجر به روابط زیر می‌شود:

$$|\psi(v_0,t)| \leq |\psi(v_0,v_1)| + k_2|t| = k_1 + k_2(15 + k + 1 + k + 1) = k_1 + k_2(17 + 2k) \leq k + k(17 + 2k) = 18k + 2k^2 < 10k^2 = t$$

بنابراین $|\psi(v_0,t)| < t$، که به همراه (۳) نشان می‌دهد اگر $T \vdash \psi(n,t)$، آن‌گاه $\psi(v_0,t)$ فرمولی شاهد درستی $\varphi(n,t)$ می‌باشد. اما با توجه به (۲)، $\varphi(n,t)$ نادرست است. در نتیجه $T \nvdash \psi(n,t)$.

□

اکنون می‌توانیم صورت معنایی قضیه ناتمامیت را به طور معمول بیان کنیم. اگر همه‌ی جملات متعلق به T درست باشد، نظریه T درست نامیده می‌شود.

نتیجه ۲.۱.۲. *(صورت معنایی قضیه‌ی اول ناتمامیت گودل)*

$\mathcal{P}r_T$ را تعریف‌پذیر در نظر بگیرید (در حالت خاص T را شمارای کارآمد در نظر بگیرید). اگر T درست باشد، آن‌گاه T ناتمام است.

برهان. قبل از هر چیز، برای هر نظریه S، $Ded(S)$ را مجموعه‌ی همه‌ی جملات اثبات‌پذیر در S در نظر بگیرید و قرار دهید $T' \doteq Q$.

آن‌گاه به وضوح $Ded(T') = Ded(Q \cup Ded(T))$، یعنی $\mathcal{P}r_{T'} = \mathcal{P}r_{Q \cup Ded(T)}$.
چون Q متناهی است و $\mathcal{P}r_T$ نیز طبق فرض تعریف‌پذیر است، مجموعه‌ی اعداد گودل جملات موجود در $Q \cup Ded(T)$ نیز تعریف‌پذیر است که به نوبه‌ی خود تعریف‌پذیری مجموعه‌ی $\mathcal{P}r_{Q \cup Ded(T)} = \mathcal{P}r_{T'}$ را نتیجه می‌دهد.
به علاوه با استفاده از تعریف، Q درست است، بنابراین T' نیز درست می‌باشد. درستی به نوبه‌ی خود منجر به سازگاری می‌شود. در نتیجه T' در شرایط قضیه‌ی قبل صدق می‌کند. به این ترتیب $T' \nvdash \psi(n,t)$ و $\neg\psi(n,t)$ نادرست می‌باشد. سپس از طرفی $T \nvdash \psi(n,t)$ از $T \subseteq T'$ به دست می‌آید و از طرف دیگر نظریه‌های درست نمی‌توانند جملات نادرست را ثابت کنند؛ پس $T \nvdash \neg\psi(n,t)$ و در نتیجه T ناتمام است. $\square$

تاکنون ما تنها روش اثبات بولوس را با بعضی تغییرات کوچک که امکان ساختن چند قدمی در راستای خطوط تعیین شده توسط اثبات اصلی را ایجاد می‌کند، تکرار کرده و مستقیم‌ترین نتیجه‌ی آن را بیان کرده‌ایم. به منظور پیشروی در این مبحث، مشاهده می‌کنیم که اگر چه اثبات بولوس اساساً یک صوری‌سازی پارادوکس بِری است، بسیار هم مستقیم نمی‌باشد. در حقیقت قضیه‌ای که می‌تواند به عنوان وفادارترین نسخه‌ی صوری پارادوکس بِری بررسی شود، قضیه‌ی تارسکی مبتنی بر تعریف‌ناپذیری درستی است. با یادآوری تذکر گودل که در بالا ذکر شد، ممکن است حدس بزنیم که «نسخه‌ی صوری هر متناقض‌نمای معرفت‌شناختی، تنها جمله‌ای مبتنی بر تعریف‌ناپذیری درستی می‌باشد و ازاین‌رو می‌تواند برای اثباتش استفاده شود». این دلیل به اندازه‌ی کافی ساده است. همانطور که تارسکی آن را در ارتباط با پارادوکس دروغگو قرار می‌دهد، نمی‌توانیم در زبان حساب راجع به درستی صحبت کنیم چون در غیر این صورت «متناقض‌نمای دروغگو می‌تواند در این زبان بازسازی شود». یک نتیجه‌ی ساده از قضیه نشان می‌دهد که می‌توان همین بحث را راجع به پارادوکس بِری مطرح کرد.

۲.۲ رابطه با پارادوکس دروغگو

پارادوکس دروغگو جمله‌ی «این جمله دروغ است» می‌باشد. تحلیل جمله‌ی دروغگو نشان می‌دهد که نه می‌تواند درست باشد (چون همان طور که بیان می‌کند، دروغ است)، و نه می‌تواند دروغ باشد (چون آن‌گاه راست است).

جمله‌ی گودل G برای نظریه‌ی T با جایگزینی اثبات‌پذیری به جای راستی، بیانی مشابه نسبت به جمله‌ی دروغگو دارد. G می‌گوید «G در T اثبات‌پذیر نیست». تحلیل راستی و اثبات‌پذیری G صورت صوری شده‌ی تحلیل راستی از جمله‌ی دروغگو است. جایگزینی اثبات‌ناپذیر با دروغ در یک جمله‌ی گودل امکان ندارد، زیرا محمول «Q عدد گودل یک فرمول نادرست است»، نمی‌تواند به عنوان یک فرمول حسابی نمایش داده شود. این نتیجه به «قضیه‌ی تعریف ناپذیری تارسکی» معروف می‌باشد که به طور مستقل توسط گودل (وقتی روی اثبات قضیه‌ی ناتمامیت کار می‌کرد) و تارسکی کشف شد.

نتیجه ۱.۲.۲. (*قضیه ی تارسکی مبتنی بر تعریف‌ناپذیری درستی حساب*)
مجموعه‌ی اعداد گودل جملات درست، تعریف‌پذیر نیست.

برهان. $\mathcal{T}r$ را مجموعه‌ی اعداد گودل جملات درست قرار دهید. هم چنین فرض کنید $\mathcal{T}r$ تعریف‌پذیر باشد. T را در قضیه چنان انتخاب کنید که مجموعه‌ی همه‌ی جملات درست باشد، یعنی

$$T = \{\sigma : \text{یک جمله درست است } \sigma\}.$$

آنگاه T، تحت استنتاج بسته است، یعنی جملات اثبات‌پذیر T همه در T هستند.
در نتیجه $\mathcal{P}r_T = \mathcal{T}r$. بنابراین T سازگار و $\mathcal{P}r_T$ تعریف‌پذیر است. به علاوه با استفاده از تعریف داریم $Q \supseteq T$. بنابراین می‌توانیم قضیه را به کار ببریم: $\psi(n,t)$ درست است اما در T اثبات‌پذیر نیست. ولی $\mathcal{P}r_T = \mathcal{T}r$ نتیجه می‌دهد که این امکان‌پذیر نیست زیرا به این معنی خواهد بود که برای هر جمله‌ی σ، σ درست است اگرر σ در T اثبات‌پذیر باشد. □

کیکوچی[1] [۷] با اصلاح روش بولوس برای نام‌گذاری (کد کردن)، صورت نحوی قضیه ناتمامیت اول را برای توسیع‌های مناسبی از حساب پئانو و نیز قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل، به دست آورد (فصل قبل). تا جایی که به قضیه‌ی اول ناتمامیت مربوط است، در حقیقت این اصلاح نیاز نیست. آن چه که مهم‌تر است، این است که با مشاهدات کاربردی‌تر و دقیق‌تر، می‌توان صورت نحوی قضیه‌ی ناتمامیت را از نتایج قبلی برای نظریه‌هایی که به طور قابل ملاحظه‌ای از حساب پئانو ضعیف‌تر هستند، به دست آورد:

نتیجه ۲.۲.۲. (*صورت نحوی قضیه‌ی اول ناتمامیت گودل*)
فرض کنید T یک توسیع بازگشتی اصل‌پذیر از Q باشد.
(۱) *اگر T سازگار باشد آن‌گاه* $T \nvdash \neg\varphi(n,t)$.
(۲) *اگر T، $\omega-$سازگار باشد آن‌گاه* $T \nvdash \varphi(n,t)$.

برهان. چون T بطور بازگشتی اصل‌پذیر است، با توجه به تعریف، $\varphi(v_\circ, v_1)$ یک Σ_1-فرمول است. به علاوه چون $\omega-$سازگاری، سازگاری را نتیجه می‌دهد، شرایط قضیه برای هر دو حالت برقرار است.

۱. چون $\varphi(v_2, t)$، Σ است، جمله‌ی $(\forall v_2 < n)\varphi(v_2, t)$ نیز Σ است و به علاوه درست است (این از تعریف ψ و قسمت (۱) در اثبات قضیه به دست می‌آید). به این ترتیب با $\Sigma-$تمامیت داریم $T \vdash (\forall v_2 < n)\varphi(v_2, t)$. از این رو $T \vdash \neg\varphi(n,t)$ نتیجه خواهد داد $T \vdash \psi(n,t)$ که با قضیه در تناقض است؛ بنابراین $T \nvdash \neg\varphi(n,t)$.

۲. فرض کنید T، $\omega-$سازگار باشد. چون $\varphi(v_\circ, v_1)$، اکنون Σ_1 است، یک $\Delta_\circ-$فرمول $\mu(v_\circ, v_1, v_i)$ وجود دارد به طوری که $\varphi(v_\circ, v_1) = (\exists v_i)\mu(v_\circ, v_1, v_i)$. همان طور که قبلاً دیده‌ایم (در اثبات قضیه) $\varphi(n,t)$ نادرست است. از این نتیجه می‌شود برای هر عدد j، $\neg\mu(n,t,j)$ یک $\Delta_\circ-$جمله‌ی درست است. با استفاده از $\Sigma-$تمامیت، برای هر j، داریم $T \vdash \neg\mu(n,t,j)$ که با توجه به تعریف $\omega-$سازگاری، نتیجه می‌شود $T \nvdash (\exists v_i)\mu(n,t,v_i)$ ؛ یعنی $T \nvdash \varphi(n,t)$. $\square$

یکی از روش‌های استاندارد اثبات قضیه‌ی گودل-راسر[2] این است که نشان دهیم نتیجه‌ی مستقیمی

[1] M. Kikuchi
[2] Godel – Rosser Theorem

از قضیه‌ی چرچ است. هم چنین این مسیر را ادامه خواهیم داد تا با استفاده از نتایج قبلی، ابتدا نشان دهیم که هیچ توسیع سازگاری از Q تصمیم‌پذیر نیست.

نتیجه ۳.۲.۲. (*قضیه‌ی چرچ درباره‌ی تصمیم‌ناپذیری حساب*)
اگر T یک توسیع سازگار از Q باشد، آن‌گاه T تصمیم‌ناپذیر است.

برهان. برای رسیدن به تناقض، فرض می‌کنیم (فرض خلف) $\mathcal{P}r_T$ یک رابطه‌ی بازگشتی باشد. از این فرض نتیجه می‌شود که $\mathcal{N}m$ نیز یک رابطه‌ی بازگشتی است، از این رو رابطه‌ی $\mathcal{B}$ نیز بازگشتی است چون از یک طرف $\mathcal{F}m$ و $\mathcal{L}h$ بازگشتی هستند و از طرف دیگر کلاس روابط بازگشتی تحت اشتراک، سورهای محدود و جایگزینی توابع بازگشتی بسته هستند. در نتیجه فرمول φ معرف $\mathcal{B}$ اکنون می‌تواند به عنوان یک Δ–فرمول انتخاب شود. چون فرض شده است که T یک توسیع سازگار از Q و $\mathcal{P}r_T$ بازگشتی است (که البته به طور بازگشتی اصل‌پذیر بودن T را نتیجه می‌دهد) می‌توانیم قسمت اول از تذکر قبل را به کار بگیریم؛ در نتیجه، $T \nvdash \neg\varphi(n,t)$.
این امر هم چنین منجر به تناقض می‌شود، چون با استفاده از قسمت (۲) در اثبات قضیه، $\neg\varphi(n,t)$ درست است، یعنی یک Σ–جمله‌ی درست است. درستی آن به نوبه‌ی خود با Σ–تمامیت، اثبات‌پذیری در T را نتیجه می‌دهد، یعنی $T \vdash \neg\varphi(n,t)$. □

در ادامه به نتیجه‌ی مستقیمی از قضیه‌ی چرچ می‌پردازیم.

نتیجه ۴.۲.۲. (*قضیه‌ی ناتمامیت راسر-گودل*)
اگر T یک توسیع سازگار و شمارای کارآمد از Q باشد، آن‌گاه T ناتمام است.

برهان. فرض کنیم T تمام باشد. $Snt(v_0)$ و $Neg(v_0, v_1)$ را مشخص کننده‌ی Δ–فرمول‌هایی در نظر بگیرید که به ترتیب معرف مجموعه‌ی اعداد گودل جملات و رابطه‌ای که بین عدد گودل یک جمله و نقیضش برقرار است، باشند. به علاوه، $\mathcal{P}r_T(v_0)$ یک Σ–فرمول باشد که مجموعه‌ی $\mathcal{P}r_T$ را تعریف می‌کند. اکنون قرار می‌دهیم

$$Prc_T(v_0) \triangleq \neg Snt(v_0) \vee (\exists v_1)(Pr_T(v_1) \wedge Neg(v_0, v_1))$$

آن‌گاه $Prc_T(v_0)$ یک Σ–فرمول است. از طرف دیگر از سازگاری و تمامیت T نتیجه می‌شود که

$Prc_T(v_\circ)$ مکمل $\mathcal{P}r_T$ را تعریف می‌کند. به این ترتیب $\mathcal{P}r_T$ و مکملش، هر دو Σ هستند، بنابراین $\mathcal{P}r_T$ بازگشتی است که با نتیجه‌ی قبلی در تناقض است. $\square$

برهان‌هایی که ما ارائه دادیم، نشان می‌دهند که صوری سازی بولوس از پارادوکس بِری، در حقیقت یک طرح برهان است.

در واقع برای بدست آوردن برهان‌های (۱) صورت معنایی قضیه‌ی ناتمامیت گودل، (۲) قضیه‌ی تارسکی، (۳) صورت نحوی قضیه‌ی ناتمامیت گودل و (۴) قضیه‌ی چرچ، ما به طور ساده چارچوب مفهومی مشترکی را که در برهان ناتمامیت بولوس به طور ضمنی ارائه شده بود به چهار نوع از نظریه‌های صوری حساب تعمیم دادیم. تعمیم ما روی نظریه‌هایی بود که در آنها مجموعه‌ی $\mathcal{P}r_T$، متناظر است با (۱) مجموعه‌های تعریف‌پذیر، (۲) مجموعه‌ی (کدهای گودل) همه‌ی جملات درست، (۳) شمارای کارآمد و (۴) بازگشتی.

فصل ۳

یادداشتی درباره‌ی خودنامصداقی و ناتمامیت

راسل در سال ۱۹۰۲ در نامه‌اش به فرگه دو نسخه از پارادوکس‌هایش را ارائه داد. نسخه‌ی اول مربوط به تعریف یک کلاس r است که کلاس‌ها به عنوان اعضایش باشند نه اعضای خودشان:

نسخه‌ی کلاس $x \in r \textit{ iff } \sim x \in x$

بنابراین، در حالت خاص $r \in r \textit{ iff } \sim r \in r$

و دومی مربوط به ویژگی R با این تعریف: تنها روی خواصی که به خودشان اثر نمی‌کنند، تأثیر می‌کند:

نسخه‌ی ویژگی $R(F) \textit{ iff } \sim F(F)$

بنابراین، در حالت خاص $R(R) \textit{ iff } \sim R(R)$

اگرچه فرگه برای تضعیف نسخه‌ی اول، تلاش زیادی نکرد، اما توانست فوراً نسخه‌ی دوم پارادوکس را کنار بزند:

«یک محمول به عنوان یک قاعده، تابع سطح اولی است که نیازمند یک شی به عنوان شناسه می‌باشد و به این ترتیب نمی‌تواند خودش را به عنوان شناسه اختیار کند»(فرگه ۱۹۸۰).

در تعریف ادعا شده از R، رشته‌ی "$\sim F(F)$" به سادگی بی معنی است. هرگاه "$F()$" بیرونی، ناتمامیت مناسبی برای قرار دادن شناسه‌اش داشته باشد، آن‌گاه اگر نماد یکسانی باشد، "F" درونی باید "$\sim F(F())$" ناتمام را بدهد. متناوباً هرگاه "F" درونی چنین ناتمامیتی را نداشته باشد، آن‌گاه اگر فرض شود که نماد یکسانی باشد، هیچ کدام دارای "F" بیرونی که به "$\sim FF$" منتهی شود، نیستند. این تفکر اساسی که نمادها ناتمامیت آنچه را که نمادینه می‌کنند، با هم تقسیم می‌کنند، استنتاجی را به وجود می‌آورد بیانگر این مطلب که رشته‌ی $\sim F(F)$ اصلاً ساختار گزاره‌ای نیست یا استنتاجی دیگر که در آن F در دو پیشامدش، (انواع) آرایه‌های مختلف را نمادگذاری می‌کند. به هر حال، شرایط مفروض برای کاربرد R، خاصیتی که روی خودش اثر نمی‌کند، را فرمول بندی نمی‌کند. به اعتقاد نویسنده، مسئله‌ای که مورد توجه قرار داده نشده، همان دلیلی است که آن‌چه نسخه‌ی محمول پارادوکس راسل نامیده می‌شود را خلع سلاح کرده و به عنوان پارادوکس گرلینگ خودنامصداقی[۱] شناخته می‌شود:

نسخه‌ی محمول $H(\text{“}F\text{”}) \textit{ iff } \sim F(\text{“}F\text{”})$

[۱] Gerlling's Paradox of Heterologicality

بنابراین، در حالت خاص $H(\text{“}H\text{”})\ \textit{iff}\ \sim H(\text{“}H\text{”})$

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که در رشته‌ی "$F(\text{“}F\text{”}) \sim$ " چطور باید دو پیشامد "F" را تعبیر کنیم؟

می‌توان به اندازه‌ی کافی بی‌طرفانه فرض کرد که پیشامد استفاده شده‌ی بیرونی به عنوان یک نماد برای یک تابع سطح اول، و پیشامد درونی برای ذکر نمادی یکسان به کار می‌آید. اما اگر نمادها، ناتمامیت مراجعشان را تقسیم کنند، این مفروضات نمی‌توانند باهم برقرار باشند. هرگاه آن‌چه استفاده شده‌است، یک نماد ناتمام باشد، آن‌گاه آن‌چه ذکر شده است اگر نمادی یکسان باشد نیز با دادن "$F(\text{“}F()\text{”}) \sim$ " باید ناتمام باشد. متناوباً، هرگاه آن‌چه ذکر شد یک نماد تمام باشد، آن‌گاه اگر فرض شود آن‌چه استفاده شده نمادی یکسان باشد، باید آن هم تمام باشد، که به " $\sim F\text{“}F\text{”}$ " منتهی می‌شود. بنابراین هم " $F(\text{“}F\text{”}) \sim$ " به هیچ وجه نمی‌تواند به عنوان یک ساختار گزاره‌ای خوانده شود، هم در غیر این صورت نماد استفاده شده با آن‌چه ذکر شده متفاوت است. در هر صورت شرایط فرض شده برای خودنامصداقی را فرمول‌بندی نمی‌کند.

اگر صحبت از استفاده و ذکر را با گونه‌های مختلف از متغیرها جایگزین کنیم، تعریف می‌کنیم:

$$Het(X)\ \ \textit{iff}\ \exists\varphi(X\ \textit{refers to}\ \varphi\ \ \&\sim\varphi(X))$$

که از آن می‌توان استنتاج کرد

$$Het(\text{“}Het\text{”})\ \textit{iff}\ \exists\varphi\ \ (\text{“}Het\text{”}\ \ \textit{refers to}\ \varphi\ \&\ \sim\varphi(\text{“}Het\text{”}))$$

که از آن‌جا با توجه به این مطلب که "Het" غیر مبهم است

$$Het(\text{“}Het\text{”})\ \textit{iff}\ \sim Het(\text{“}Het\text{”}).$$

فصل ۴

خودنامصداقی و ناتمامیت

هدف از این فصل، ارائه‌ی یک اثبات معنایی مطمئن از قضیه‌ی ناتمامیت گودل است. به طور اساسی، اثبات در چارچوبی مشابه چارچوب کریواین[۱] [۱۰] انجام خواهد شد. به هرحال در اینجا قصد داریم به جای پارادوکس بِری، کوچک‌ترین عدد تعریف‌ناپذیر توسط n کلمه (یا با هر فرمول به طول کم‌تر از n) از پارادوکس گرِلینگ عبارات خودنامصداق استفاده کنیم.

پارادوکس گرِلینگ

در مقاله‌ی ۱۹۰۸ نوشته‌ی کورت گرلینگ (۱۹۴۲-۱۸۸۶) و لئونارد نلسون[۲]، پارادوکس‌هایی را یافتیم که از پارادوکس راسل الهام گرفته بودند. یکی از این پارادوکس‌ها به متناقض‌نمای گرِلینگ معروف است. برای بیشتر باز شدن این متناقض‌نما، محمولات رابه دو دسته تقسیم می‌کنیم؛ دسته‌ی اول شامل همه‌ی آن محمولاتی خواهد بود که خاصیتی را که مالک آن هستند بیان می‌کنند. مثل «polski»، «English» و «multisyllabic». این دسته را محمولات خودمعنی[۳] می‌نامیم. دسته‌ی دیگر شامل آن دسته از محمولات خواهد بود که بیانگر خاصیتی هستند که خود مالک آن نیستند. مثل «German»، «polish» و «monosyllabic». محمولات این دسته خودنامعنی[۴] نامیده خواهند شد. اگر محمولی خودنامعنی باشد یعنی خاصیتی را بیان می‌کند که خودش ندارد. اما این محمول، بیانگر نداشتن خاصیتی که آن را بیان می‌کند، می‌باشد. در نتیجه محمول خودنامعنی، خودمعنی می‌باشد. اکنون اجازه بدهید فرض کنیم محمول خودنامعنی، خودمعنی باشد، این یعنی مالک خاصیتی است که این محمول آن را بی‌نتیجه می‌کند. اما خاصیت، خاصیتی که محمول مربوط به آن است، نیست. در نتیجه محمول خودنامعنی، خودمعنی است. هر دو استدلال به کار می‌رود و به این ترتیب محمول خودنامعنی، خودمعنی است اگر و تنها اگر خودنامعنی باشد. کوئین در کتاب Quiddities اش فرم زیر از متناقض‌نمای گرِلینگ را ارائه داده که به نظرمی‌رسد به متناقض‌نمای اصلی قرون وسطی نزدیک‌تر باشد. علاوه براین رابطه‌ی نزدیکش با پارادوکس آرایشگر را نشان می‌دهد:

«هیچ صفتی تنها مشخص کننده‌ی همه آن صفت‌هایی که خودشان را مشخص نمی‌کنند، نیست.»

این تغییر اجازه می‌دهد اثبات را ساده‌تر دنبال کنیم. متناقض‌نمای گرِلینگ می‌تواند از روش زیر

[۱] Krivine
[۲] Leonard Nelson
[۳] Autosemantic
[۴] Heterosemantic

به دست آید. یک گزاره‌ی خودنامصداق (یک موضعی) در نظر بگیرید که نسبت به خودش درست نباشد (مثلاً طولانی خودنامصداق است چون یک گزاره‌ی طولانی نیست). اما راجع به محمولی که تا کنون فقط تعریف کرده‌ایم، چه باید گفت؟ آیا «خودنامصداق»، خودنامصداق است؟ با یک استنتاج ساده، به تناقض می‌رسیم. اگر خودنامصداق، خودنامصداق باشد، نیست و اگر خودنامصداق نباشد، هست.

به نظر می‌رسد که بیان یک جنبه‌ی معنایی از قضیه‌ی ناتمامیت وضوح قضیه را بالا می‌برد. به عقیده‌ی نویسنده، ملاحظات معنایی در این قسمت، فهم عمیق‌تری نسبت به اثبات نظری محض به ما می‌دهد. در بخش دوم از این فصل، قضیه‌ی دوم ناتمامیت، برای نظریه‌ی مجموعه‌های ZF[۱] نشان داده شده است. بخش سوم، آن را در حساب بررسی می‌کند.

۱.۴ ناتمامیت نظریه مجموعه ها

هر جفت $M = (|M|, R)$ را یک مدل خواهیم نامید به طوری که $R \subseteq |M|^2$ و به جای R خواهیم نوشت «$\in_M$» چون بر آنیم که R را به عنوان یک تعبیر ممکن از «$\in$» بررسی کنیم.

تعریف ۱.۱.۴ . M زیر مدلی از N است اگر وتنها اگر $|M| \subseteq |N|$ و $\in_M = \in_N \cap |M|^2$.

تعریف ۲.۱.۴ . M یک زیر مدل متعدی از N است اگر وتنها اگر M زیر مدلی از N باشد و برای هر a و b، اگر $a \in |M|$ و $b \in |N|$ و $N \models b \in a$ آنگاه $b \in |M|$.

T را یک نظریه در زبان ZF، شامل ZF در نظر بگیرید. این که فرمول‌ها را می‌توان با مجموعه‌های موروثاً متناهی، یعنی اعضای V_ω تشخیص داد مبحثی شناخته شده است (برای مثال هر مجموعه‌ی متفاوت متعلق به V_ω را که یک نقش از نمادهای زبان ما را بازی خواهد کرد، انتخاب می‌کنیم و آنگاه فرمول‌ها را به صورت n تایی‌های مشخص از این نمادها تعریف می‌کنیم).

[۱] Zermelo – Freankel Set Theory

۲.۴ مجموعه‌های موروثاً متناهی

در ریاضیات و نظریه‌ی مجموعه‌ها، مجموعه‌های موروثاً متناهی، به طور بازگشتی به صورت مجموعه‌های متناهی شامل صفر یا دیگر مجموعه‌های موروثاً متناهی تعریف شده‌اند. یک تعریف بازگشتی از این نوع مجموعه‌ها به صورت زیر است:
حالت پایه: مجموعه‌تهی، یک مجموعه‌ی موروثاً متناهی است.
قاعده‌ی بازگشت: اگر $a_۱, \cdots, a_k$ موروثاً متناهی باشند $\{a_۱, \cdots, a_k\}$ نیز موروثاً متناهی است.

مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌های موروثاً متناهی را با V_ω نشان می‌دهند.

از این پس روی مدل‌هایی بحث می‌شود که در آن‌ها رابطه‌ی $\in$ محدود به V_ω، حفظ شده است؛ یعنی برای هر $x, y \in V_\omega$، $x \in_{M_۱} y$ اگر وتنها اگر $x \in y$. به ویژه همه‌ی فرمول‌های زبان T متعلق به این مدل‌هاست. علامت $\ulcorner\varphi\urcorner$ برای این منظور استفاده می‌شود که فرمول وابسته را به عنوان یک عضو از مدل داده شده بررسی کنیم.

اکنون فرض می‌کنیم M یک مدل باشد و N را مدل درونی آن قرار می‌دهیم (به صورت مجازی: اگر ما از داخل M نگاه کنیم، N یک مدل است اما در واقعیت شاید مدل نشود). این موقعیت را با $N = (|N|^M, (\in_N)^M)^M$ توضیح می‌دهیم؛ به معنی این که همه‌ی مفاهیم مربوط باید مطابق با M در نظر گرفته شوند (برای مثال $\{x\}^M$ حالتی است که فقط x رابطه‌ی $\in_M$ را به آن مربوط می‌کند؛ علامت $(x, y)^M$ باید به روشی مشابه تعبیر شود). در هر حال بهتر است از N در سطحی مشابه با Mصحبت کنیم (یعنی بدون داخل شدن در M). بنابراین نقطه‌ی مقابل آن را تعریف می‌کنیم: یک مدل N^*، برگرفته از M که در روشی یکسان با توجه به فرمول‌های حقیقی رفتار می‌کند، همان طور که N با توجه به فرمول‌های بسیار در M رفتار می‌کند.

تعریف ۱.۲.۴. قرار دهید:

۱. $|N^*| = \{a \in |M| : M \models a \in |N|^M\}$

۲. $\in_{N^*} = \{(a, b) \in |N^*|^۲ : M \models \text{“}N \models a \in b\text{”}\}$

۳. $N^* = (|N^*|, \in_{N^*})$

علامت نقل قول یعنی این که مکان مربوط باید به وسیله‌ی یک فرمول مناسب از نظریه‌ی مجموعه‌ها با پارامترهای a و b پر شود. به خصوص عبارت "$N \models a \in b$" یعنی $((a,b)^M, (\in_N)^M) \in\in_M$.

لم ۲.۲.۴. *$\varphi(a_1, \cdots, a_k)$ را فرمولی با پارامترهایی در N^* در نظر بگیرید. آنگاه $N^* \models \varphi(a_1, \cdots, a_k)$ اگر وتنها اگر $M \models$ "$N \models \varphi(a_1, \cdots, a_k)$".*

برهان. اثبات با استقرا روی پیچیدگی φ می‌باشد. با توجه به ۱.۱.۴ و تعریف مدل بودن، N^* زیر مدلی از M است.

اگر φ اتمی باشد، آن‌گاه با توجه به تعریف $\in_{N^*}$

$$N^* \models \varphi \Longleftrightarrow M \models \text{ ``}N \models \varphi\text{''}$$

اگر $\varphi = \neg\psi$ باشد، آن‌گاه

$$N^* \models \varphi(\overline{a}) \Longleftrightarrow N^* \models \neg\psi(\overline{a}) \Longleftrightarrow$$
$$N^* \not\models \psi(\overline{a}) \Longleftrightarrow M \not\models \text{``}N \models \psi(\overline{a})\text{''} \Longleftrightarrow$$
$$M \models \text{ ``}N \not\models \psi(\overline{a})\text{''} \Longleftrightarrow M \models \text{ ``}N \models \neg\psi(\overline{a})\text{''} \Longleftrightarrow M \models \text{ ``}N \models \varphi(\overline{a})\text{''}$$

اگر $\varphi = \theta \wedge \psi$ باشد، آن‌گاه

$$N^* \models \varphi(\overline{a}) \Longleftrightarrow N^* \models (\theta \wedge \psi)(\overline{a}) \Longleftrightarrow$$
$$N^* \models \psi(\overline{a}) \wedge \theta(\overline{a}) \Longleftrightarrow N^* \models \psi(\overline{a}) \wedge N^* \models \theta(\overline{a}) \Longleftrightarrow$$
$$M \models \text{ ``}N \models \psi(\overline{a})\text{''} \ \wedge \ M \models \text{ ``}N \models \theta(\overline{a})\text{''} \Longleftrightarrow$$
$$M \models \text{ ``}N \models \psi(\overline{a}) \wedge \theta(\overline{a})\text{''} \Longleftrightarrow M \models \text{ ``}N \models \varphi(\overline{a})\text{''}$$

برای حالت $\varphi = \theta \vee \psi$، اثبات مشابه حالت قبل است.

و اما اگر $\varphi(\overline{v}) = \exists w \psi(\overline{a}, w)$ باشد، آن‌گاه

$$N^* \models \varphi(\overline{a})$$

$$\iff N^* \models \varphi(\overline{a}, b) \quad \text{برای } b \in N^* \text{ای}$$

$$\iff M \models \text{“}N \models \psi(\overline{a}, c)\text{”} \quad \text{برای } c \in M \text{ای}$$

$$\iff M \models \text{“}N \models \varphi(\overline{a})\text{”}$$

□

تعریف ۳.۲.۴. T اصل‌پذیر است اگر وتنها اگر وجود داشته باشد $\varphi(x)$ به طوری که $\varphi(x)$ فرمول مطلق با یک متغیر آزاد و بدون پارامتر باشد و $T = \{a \in \ Sent : (V_\omega, \in) \models \varphi(a)\}$ جایی که $Sent$ مجموعه‌ی جملات است.

در بحث از دومین قضیه‌ی ناتمامیت، قصد داریم راجع به مدل‌هایی از T صحبت کنیم که خودشان شامل مدل‌هایی از T هستند. اما این فرمول‌بندی نیازمند اصلاح است. در حقیقت آن‌چه که لازم است یک مدل درونی (یعنی مشمول در M) از یک نظریه T است که در محدوده‌ی M ساخته شده باشد.

بنابراین برای مثال وقتی می‌نویسیم $M \models \text{“}N \models T\text{”}$ یعنی این که برای یک فرمول مشخصه‌ی T بر حسب تعریف ۳.۲.۴ داریم:

$$.M \models \text{“}\forall x \in \ Sent \ [(V_\omega, \in) \models \varphi(x) \Rightarrow N \models x]\text{”} \qquad (۱.۴)$$

اکنون N^* را مدلی که با بیرون آوردن یک مدل N از M به دست آمده در نظر می‌گیریم. آن‌گاه داریم:

لم ۴.۲.۴. *اگر* $M \models \text{“}N \models T\text{”}$ *آن‌گاه* $N^* \models T$

برهان. این لم با استفاده از این واقعیت که برای یک فرمول نظریه مجموعه‌ها، مانند

$$\varphi(x_۱, ..., x_n)$$

(که در آن از پارامترهای M استفاده نشده باشد) و

$$a_۱, ..., a_n \in V_\omega$$

اگر $(V_\omega, \in) \models \varphi(a_۱, ..., a_n)$ آن‌گاه $M \models \text{“}(V_\omega, \in) \models \varphi(a_۱, ..., a_n)\text{”}$، اثبات می‌شود. خود این واقعیت می‌تواند با استقرا روی پیچیدگی یک فرمول φ ثابت شود. □

تعریف ۵.۲.۴. $M_1 < M_2$ اگر وتنها اگر M_3 وجود داشته باشد به طوری که از M_2 انتخاب شده و با M_1 یکریخت باشد.

لم ۶.۲.۴. *برای هر M_1، M_2 و M_3 اگر $M_1 < M_2$ و $M_2 < M_3$ آن‌گاه $M_1 < M_3$.*

برهان. اثبات بر پایه‌ی این دو مطلب است:

۱. اگر در محدوده‌ی M_3، M_1^* مدلی از نقطه نظر M_2^* باشد (یعنی اگر داشته باشیم $M_3 \models$ "$M_2^* \models M_1^*$ یک مدل است")، آنگاه بازهم در محدوده‌ی M_3 می‌توانیم M_1^* را از M_2^* برداریم و بعد یک بار دیگر می‌توانیم آن را از M_3 برداریم. با این روش یک مدل «واقعی» M_1 به دست می‌آوریم. اکنون نکته این است که اگر در ابتدا M_2^* را از M_3 برمی‌داشتیم، چون در آن صورت باز هم M_1 در M_2^* تعریف‌پذیر بود، پس می‌توانستیم M_1^* را مستقیماً از M_2 برداریم و باز هم یک مدل «واقعی» M_1 بدست می‌آمد.

۲. اگر M_1 با M_2 یکریخت باشد و M_3 مدلی باشد که از M_1 برداشته شده، آن‌گاه یک مدل M_4 برداشته شده از M_2 وجود دارد به طوری که M_4 با M_3 یکریخت است.

□

تعریف ۷.۲.۴. φ را فرمول مشخصه‌ی T قرار دهید. آن‌گاه از Con_T جمله‌ی زیر استنباط می‌شود: مدل M وجود دارد به طوری که برای هر ψ اگر $\psi \in Sent$ و $(V_\omega, \in) \models \varphi(\ulcorner\psi\urcorner)$ آن‌گاه $M \models \psi$.

اکنون می‌توانیم قضیه دوم ناتمامیت را بیان کنیم.

قضیه ۸.۲.۴. *(قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل)*
اگر T یک مدل داشته باشد آن‌گاه $T + \neg Con_T$ یک مدل دارد. به عبارت دیگر $T \nvDash Con_T$.

تذکر ۹.۲.۴. در بیان معمول قضیه‌ی دوم ناتمامیت، جمله‌ی Con_T به صورت نحوی تعبیر شده است: «هیچ برهانی برای $\ulcorner ۱ = ۰ \urcorner$ از T وجود ندارد». این دو نسخه معادل هستند. به شرط این که یکی از آن‌ها دارای شرایط استنتاج‌پذیری ([۱۲] را ببینید) که مشخص کننده‌ی خواص اساسی محمول $\mathcal{P}r_T$ (اثبات‌پذیری در T) است، باشد. بدون شرایط استنتاج‌پذیری، نسخه‌ی معنایی قضیه‌ی ناتمامیت اساساً ضعیف‌تر از نوع کلاسیک آن خواهد بود.

استدلال منتج به قضیه‌ی ۸.۲.۴ را با تعریف محمول «خودنامصداق» به اختصار het_T شروع می‌کنیم. سپس جمله‌ی HET_T را که در متناقض‌نمای اصلی عبارات خودنامصداق، بیانگر نتیجه‌ی «خودنامصداق»، خودنامصداق است، معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۲.۴. تعریف می‌کنیم

(آ) $het_T(\ulcorner\varphi(x)\urcorner)$ اگر یک مدل M از T وجود داشته باشد به طوری که $M \nvDash \varphi(\ulcorner\varphi(x)\urcorner)$.

(ب) HET_T اگر $het_T(\ulcorner het_T(x)\urcorner)$.

در ادامه قصد داریم دو گزاره‌ای را که به اتفاق هم قضیه‌ی دوم ناتمامیت را نتیجه می‌دهند، اثبات کنیم.

گزاره ۱۱.۲.۴. $T \models Con_T \equiv HET_T$

گزاره ۱۲.۲.۴. *اگر T یک مدل داشته باشد آن‌گاه* $T \not\models HET_T$.

برهان گزاره‌ی اول:

قرار دهید $M \models T$ و $M \models Con_T$. همچنین فرض کنید که $M \models \neg HET_T$، با توجه به تعریف HET_T به این نتیجه می‌رسیم $M \models \forall N[\text{“}N \models T\text{”} \Rightarrow \text{“}N \models HET_T\text{”}]$. چون $M \models Con_T$، مجموعه‌ی N را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $M \models \text{“}N \models T\text{ ”}$. آنگاه به وضوح $M \models \text{“}N \models HET_T\text{”}$. از تعریف HET_T یک مجموعه‌ی S وجود دارد به طوری که $M \models \text{“}N \models \text{“}S \models T\text{””}$ و $M \models \text{“}N \models \text{“}S \models \neg HET_T\text{””}$. سپس با کار درون M می‌توانیم S را از N برداریم و بدست آوریم: $M \models \text{“}S \models T\text{”}$ و $M \models \text{“}S \models \neg HET_T\text{”}$. اما این یک تناقض است، زیرا همان طور که قبلاً مشاهده کردیم، هر مدل T درون M باید مدلی از HET_T باشد. اکنون یک طرف اثبات شد و برای طرف دیگر قرار دهید $M \models T$ و $M \models HET_T$. همچنین فرض کنید $M \not\models Con_T$. این فرض با توجه به تعریف Con_T، با مدل بودن M برای T متناقض است.

برهان گزاره‌ی دوم:

فرض کنید T دارای یک مدل M باشد. همچنین فرض کنید $T \models HET_T$. بنابراین $M \models HET_T$. آن‌گاه یک مدل دیگر N از T در M وجود خواهد داشت که در آن $\neg HET_T$ درست

است. حال آن را از M برمی‌داریم. به دست می‌آوریم $N^* \models T$ و $N^* \models \neg HET_T$ که با فرض ما یعنی $T \models HET_T$ در تناقض است. □

با این ترتیب روند اثبات گزاره‌های اول و دوم را مشاهده کردیم. حال قضیه‌ی ۸.۲.۴ به طور بدیهی نتیجه می‌شود؛ فرض کنید که T یک مدل داشته باشد و $T \models Con_T$. در این حالت با استفاده از گزاره‌ی اول $T \models HET_T$، اما با گزاره‌ی دوم، T مدل ندارد و این اثبات را خاتمه می‌دهد.

۳.۴ ناتمامیت حساب پئانو

T را یک نظریه‌ی سازگار اصل‌پذیر در زبان PA که شامل PA است، قرار دهید. به منظور بازسازی فرمول HET_T در حساب، نیازمند یافتن راهی برای ایجاد محدودیت روی مدل‌ها هستیم. $\varphi_T(x)$ را یک Δ_0–فرمول (یعنی تنها با سورهای محدود) که در مدل‌های استاندارد معرف مجموعه‌ای از اصول T است، قرار دهید. $Tr_2(x)$ را یک محمول درست برای Σ_2–فرمول‌ها و $Sent$ را مجموعه‌ی جملات قرار دهید. در محدوده‌ی T تعریف زیر از محمول $Compl_T$ را معرفی می‌کنیم، جایی که Φ، Σ_2 است:

$$Compl_T(\Phi) \equiv \forall\psi[\psi \in Sent \Rightarrow [Tr_2(\ulcorner\Phi(\psi)\urcorner) \vee Tr_2(\ulcorner\Phi(\neg\psi)\urcorner)]$$

$$\wedge\forall x[\varphi_T(x) \Rightarrow Tr_2(\ulcorner\Phi(x)\urcorner)]$$

$$\wedge\neg\exists d\ [d \text{ is a proof of } \ulcorner 0 \neq 0\urcorner \text{ based on the set of formula } \theta \text{ such that } Tr_2(\ulcorner\Phi(\theta)\urcorner)]$$

معنی این عبارات این است که Φ یک توسیع سازگار کامل از T را تعریف می‌کند. قضیه تمامیت حسابی شده را از هیلبرت و برنِیز[1] اقتباس خواهیم کرد:

$$(HB)\ \ T \vdash Con_T \equiv \exists\Phi Compl_T(\Phi)$$

این قضیه به ما اجازه می‌دهد مجموعه‌ی جملات نظری خود را در داخل T دوباره بسازیم.

$$het_T(x) \equiv \exists\psi[Compl_T(\psi) \wedge Tr_2(\ulcorner\psi(\neg x(x)\urcorner)]،$$

[1] Bernays

و

$$.HET_T \equiv het_T(\ulcorner het_T(x) \urcorner)$$

پس گزاره‌ی Con_T از HET_T نتیجه می‌شود. از طرفی

$$.het_T(x) \equiv \exists\psi[Compl_{T+\neg x(x)}(\psi)]$$

پس با استفاده از (HB) داریم:

$$.het_T(x) \equiv Con_{T+\neg x(x)}$$

یا به عبارت دیگر

$$.het_T(x) \equiv \neg Pr_T(\ulcorner x(x) \urcorner)$$

اکنون می‌توانیم این را در تعریف‌مان از HET_T جایگزین کنیم. آن‌گاه بدست می‌آوریم

$$،HET_T \equiv \neg Pr_T(\ulcorner het_T(het_T(x) \urcorner))$$

که به نوبه‌ی خود به این معناست که

$$.HET_T \equiv \neg Pr_T(\ulcorner HET_T \urcorner)$$

مثال دیگری از یک جمله که می‌گوید «اثبات‌پذیر نیستم» بدست آورده‌ایم. بنابراین می‌توانیم به روشی استاندارد، همتاهای حسابی هر دو گزاره‌ی اول و دوم را اثبات کنیم.

ضمیمه

پارادوکس ریچارد

این پارادوکس که در سال ۱۹۰۵ توسط ریچارد منتشر شد از اهمیت خاصی برخوردار است، چون کاریکاتوری از روش قطری کانتور می‌باشد. انواع مختلفی از این پارادوکس تاکنون شناسایی شده که یک نوع ساده‌ی آن در زیر آمده است.

همه‌ی اعداد حقیقی بین صفر و یک که می‌توانند به طور منحصربه فرد با دنباله‌هایی از کلمات فارسی با طول متناهی (اما نامحدود) تحلیل شوند را مورد بررسی قرار دهید مثل ۰.۸، ۰.۰۷۴. بوضوح بسیاری از اینگونه اعداد به طور شمارش‌پذیر وجود دارد.

R را مجموعه‌ی این اعداد در نظر بگیرید. آنگاه R می‌تواند شمارش شود. یک چنین شمارشی را بررسی کنید. اکنون یک عدد حقیقی r به صورت عددی حقیقی بین صفر و یک که n -امین رقم بعد از دهگان، دنباله‌ی گردشی از n -امین رقم n -امین عدد در شمارش تحت بررسی است را تحلیل می‌کنیم (جایی که یک، دنباله‌ی گردشی صفر و... و صفر، دنباله‌ی گردشی ۹ می‌باشد.)

پارادوکس بِری اساساً یک ساده‌سازی مبتکرانه و عملی از پارادوکس ریچارد است.

لم قطری‌سازی

در منطق ریاضی، لم قطری‌سازی وجود جملات خود-ارجاع در نظریه‌های صوری خاص از اعداد طبیعی را تصدیق می‌کند. به خصوص نظریه‌هایی که به اندازه‌ی کافی برای نمایش همه‌ی توابع محاسبه‌پذیر قوی هستند. جملاتی که وجودشان با استفاده از لم قطری اثبات شده است، می‌توانند برای اثبات نتایج اساسی چون ناتمامیت گودل استفاده شوند.

جمله‌ی گودل

یک جمله‌ی گودل جمله‌ای است که درست است اما نمی‌تواند در سیستم داده شده اثبات شود.

حساب رابینسون

در ریاضیات، حساب رابینسون، یک بخش اصل‌بندی شده‌ی متناهی از حساب پئانو است. Q اساساً همان PA بدون اصل استقرا است. چون Q ضعیف‌تر از پئانو است، ناتمام است.

اصول حساب رابینسون

۱. $S(x) \neq 0$

۲. $S(x) = S(y) \to x = y$

۳. $x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x = S(y))$

۴. $x + \bar{0} = x$

۵. $x + S(y) = S(x + y)$

۶. $x * \bar{0} = \bar{0}$

۷. $x * S(y) = (x * y) + x$

۸. $x \leq y \equiv (\exists z)(z + x = y)$

مراجع

[1] Z. ADAMOWICZ, T.BIGORAGSKA, Existentially Closed Structures and Gödel's second Incompleteness Theorem, *The Journal of Symbolic Logic* **66** (2001) 349–356.

[2] G. BOOLOS, A New Proof of the Gödel's Incompleteness Theorem, *Notices of the AMS* **36** (1989) 388–390.

[3] G. BOOLOS, *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, cambridge, (1995).

[4] C. CIESLINSKI, Heterologicality and Incompleteness, *Math. Log. Quart.* **48** (2002) 105–110

[5] K. GÖDEL, *On Formally Undecidable Proposition of Principia Mathematica and Related Systems*, Vol. I, Routledge, London (1988).

[6] P. HÁJEK, P. PUDLÁK, *Mathematics of First-Order Arithmetic*, Springer-Verlag, Berlin (1993).

[7] M. KIKUCHI, A Note On Boolos' Proof of the Incompleteness Theorem, *Math. Log. Quart.* **40** (1994) 528–532

[8] M. KIKUCHI, M. TANAKA, *On Formalization of Model-Theoritic Proofs of Gödel's Theorems. Notre Dome Journal of Formal Logic* **35** (1994) 403–412

[9] G. KREISEL, Notes on Arithmetical Models for Consistent Formulae of The Predicate Calculus, *Fund. Math.* **37** (1950) 265–285.

[10] J.-L. KRIVINE, *Théorie Axiomatique des Ensembles*, PUF, Paris (1972).

[11] G. SERENY, Boolos-style Proofs of Limitative Theorems, *Math. Log. Quart.* **50** (2004) 211–216

[12] C. SMORYNSKI, The Incompleteness Theorem, Handbook of Mathematical Logic , *North Holland, Amsterdam* (1997) 821–865.

[13] P.M. SULLIVAN, A Note on Incompleteness and Heterologicality, Analysis **63** (2003) 32–38.

واژه‌نامه

شناسه	Argument
قضیه‌ی تمامیت حسابی شده	Arithmetized Completeness Theorem
متناقض‌نما	Antinomy
پارادوکس بری	Berry's Paradox
تمام	Complete
توسیع سازگار	Consistent Extention
تصمیم‌پذیر	Decidable
استنتاج‌پذیر	Derivable
قطری‌سازی	Diagonalization
نیم‌حلقه‌های به طور گسسته مرتب	Discretely Ordered Semi-Ring
معرفت‌شناختی	Epistemological
قضیه‌ی آخر فرما	Fermat's Last Theorem
صوری‌سازی	Formalization
نظریه‌ی صوری شامل حساب	Formal Theory Containing Arithmetic
سیستم صوری	Formal System
قضیه‌ی اساسی جبر	Fundamental Theorem of Algebra
قضیه‌ی اساسی حساب	Fundamental Theorem of Arithmetic

قضیه‌ی گودل-راسر .... Rosser-Godel Theorem
حدس گلدباخ .... Goldbach's Conjecture
پارادوکس گرلینگ .... Grelling's Paradox
مجموعه‌های موروثاً متناهی .... Hereditarily Finite Sets
خودنامصداق .... Heterological
خودنامعنی .... Heterosemantic
برنامه‌ی سازگاری هیلبرت .... Hilbert's Consistency Program
ناتمامیت .... Incompleteness
وضع مقدم .... Modus Ponens
سور .... Quantifier
پارادوکس ریچارد .... Richard's Paradox
توصیف‌پذیر .... Nameable
پیشامد .... Occurance
خودمعنی .... Outosemantic
محمول .... Predicate
به طور بازگشتی اصل‌پذیر .... Recursively Axiomatizable
شمارای کارآمد .... Recursively Enumerable
فرض ریمان .... Reimann's Hypothesis
اصل استقرا .... Schema of Induction
خود-ارجاعی .... Self-Reference
زیرساختار .... Substructure
اثبات‌ناپذیر .... Unprovable
خوش ساخت .... Well-Formed

Surname: Azarpeyvand **Name:** Fateme

Title: Heterologicality and Incompleteness

Supervisor: Dr. Saeed Salehi

Advisor: Dr. Jafar Sadegh Eivazloo

Degree: Master of Science **Subject:** Pure Mathematics

Field: Logic **University of Tabriz**

Faculty of Mathematical Sciences **Date:** 2012 **Number of Pages:** 54

Keywords: Heterologicality, Incompleteness, Berry's Paradox, Grelling's Paradox

Abstract

Gödel's Incompleteness Theorem, which is one of the most important mathematical achievments of the 20th century, was proved by philosophical idea of Liar paradox. In his major paper, Gödel points out that instead of the Liar paradox, it is possible to take advantage from the other paradoxes such as Berry's paradox (the smallest undefinable natural number).

We present a semantic proof of Gödel's second incompleteness theorem employing Grelling's antinomy of heterological expressions. For a theory T containing ZF we define the sentence HET_T which says intuitively that the predicate "heterological" is itself heterological. We show that this sentence doesn't follow from T and is equivalent (provably in T) to the consistency of T. Finally we show how to construct a similar incompleteness proof for Peano Arithmetic.

University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN PURE MATHEMATICS

Heterologicality and Incompleteness

Supervisor

Dr. Saeed Salehi

Advisor

Dr. Jafar Sadegh Eivazloo

by

Fateme Azarpeyvand

2012